Introducción a las finanzas matemáticas

Carlos Ibarra Valdez, Area de Análisis, UAM Iztapalapa.

ibvc@xanum.uam.mx*, *caibva@gmail.com

1. ***Jueves 2.* Panorama general de Finanzas. El modelo básico del mercado a 1 período.** *Conceptos básicos (valuación, arbitraje, cobertura, completez, medidas martingala) en el caso discreto. Pág. 4.*

2. ***Viernes 3.* Elementos de cálculo estocástico. Aplicaciones a Finanzas.**
Procesos, distribuciones finito dimensionales, esperanza condicional y propiedades. La integral estocástica. Lema de Itô. Ecuaciones diferenciales estocásticas. Aplicaciones a finanzas. Pág. 21.

3. ***Sabádo 4.* Dinámica de mercados financieros. El modelo de Samuelson, Merton & Karatzas (SMK).**
Conceptos básicos (valuación, arbitraje, cobertura, completez, medidas martingala) en tiempo continuo. El modelo de Black Scholes. Pág. 54.

4. ***Domingo 5*. La fórmula de Black Scholes. Los dos teoremas fundamentales de finanzas matemáticas (***Teoremas fundamentales de valuación de activos***).** *Pág. 68*

5. ***Domingo 5*, plus. Modelos de tasas de interés.** *Pág. 85.*

ADVERTENCIA IMPORTANTE

El material que se presentará es mucho y un tanto difícil. No sólo desde el punto de vista matemático, sino conceptual. Contiene una buena dosis de ***cálculo estocástico*** *e implícitamente también de* ***economía financiera****.*

El nivel general es de fines de la licenciatura en matemáticas, pero avanzado, y en algunos aspectos y temas concretos, el nivel es de posgrado.

El libro de Mikosch (1999) da una buena idea del nivel mínimo. En la UAM Iztapalapa, los cursos más cercanos a este material serían los de 'Cálculo estocástico para finanzas' y 'Métodos matemáticos para finanzas II', que se imparten regularmente en la Maestría en Matemáticas Aplicadas e Industriales.

La herramienta matemática que representa el principal obstáculo para aprender a fondo cálculo estocástico y por ello finanzas matemáticas es la Teoría de la Medida e Integral de Lebesgue. Sin embargo, se pueden llegar a manejar bastante bien, hasta un cierto punto, los aspectos operativos y conceptuales, tal como lo hacen economistas, financieros o físicos que trabajan en el tema y no conocen la teoría de la medida. Por otra parte, para un matemático profesional, es realmente indispensable que adquiera esa base, si quiere aprender y manejar bien finanzas matemáticas. Una excelente referencia en esta dirección es S. B. Chae (1994).

Sin embargo, en este mini curso no utilizaremos explícitamente teoría de la medida ni integral de Lebesgue*, salvo breves referencias optativas, de vez en cuando.*

Tocaremos también un poco de material adicional y más avanzado : los dos teoremas fundamentales de finanzas matemáticas a un nivel relativamente general, y una muy rápida introducción a modelos de tasas de interés.

Los objetivos básicos de esta presentación, cuyo material realmente no puede ser "aprendido" aquí – excepto, hasta cierto punto, por alguien que ya maneje bien el cálculo estocástico – es dar un panorama general del tema de finanzas matemáticas, así como despertar el interés en estudiarlo con más detalle y más profundamente, ya sea en cursos ó en los textos mencionados. Además, las notas impresas contienen otros materiales extra (como la fórmula *de Feynman – Kac) que no serán mencionadas en las exposiciones, pero que podrían servirle más adelante al lector interesado.*

Dependiendo del tiempo, las preguntas, etc. podría ser que no sigamos estrictamente el temario en los días asignados. Podríamos adelantarnos, ó más probablemente, retrasarnos en algunos puntos.

Será muy conveniente, realmente indispensable, que pregunten y participen lo más posible. Estaré a su disposición fuera de las sesiones, la mayor parte del tiempo, para contestar preguntas, ampliar algunos puntos o simplemente platicar alrededor de estos temas.

Sobre la bibliografía. *Se encuentra al final de las notas* ***en orden cronológico ascendente****. Los textos que más utilizaremos son :*

T. Mikosch (1999) ; S. Shreve (2004); T. Björk (2005); F. Klebaner (2005); B. Oksendal (2005); L. Arnold (1978); Filipovic (2009).
Si se requiere completo rigor matemático, ver : Karatzas (1997), Tudor (1997) o Williams (2006).
Puede ser de utilidad la siguiente tesis de maestría : A. Sánchez-Peralta (2010).

<u>Jueves 2.</u>

A. Panorama general.

B. El modelo de mercado a un período.

A. Panorama general

A.1 La esfera de las Finanzas antes y después de 1973.

Los conocimientos y desarrollos teóricos acerca de cuestiones financieras son tan antiguos como las civilizaciones, por obvias razones económicas y sociológicas. No sólo las cuestiones relacionadas con intercambios, préstamos e interés, sino que versiones no tan rudimentarias de los sofisticados instrumentos denominados actualmente derivados financieros, como las opciones y los futuros, eran conocidos desde hace milenios y se han comerciado a lo largo de la historia. Aparecen mencionados, regulados o criticados en el Código de Hammurabi y en el Antiguo Testamento, entre otras fuentes.
A partir del surgimiento de la banca moderna, aproximadamente al mismo tiempo que el renacimiento italiano, se van desarrollando los elementos básicos de las finanzas, la mayor parte relacionados con cuestiones contables y de intermediación financiera, así como con el importante tema de los seguros. Los aspectos matemáticos de este conocimiento fueron, desde entonces hasta 1973, relativamente elementales. Con la excepción de las aportaciones de Louis Bachelier alrededor de 1900, las cuales pasaron casi desapercibidas hasta fines de los años sesenta del siglo pasado.
En comparación con la matemática utilizada en física e ingeniería e incluso en teoría económica, las matemáticas utilizadas en teoría financiera y finanzas "aplicadas" o "prácticas" era muy elemental : estadística, álgebra lineal, optimización básica y poco más. Hasta 1973. Alrededor de este año desarrollos incipientes comienzan a cristalizar, y en menos de una década, la teoría financiera da un salto cualitativo, especialmente desde el punto de vista técnico, y sus niveles teóricos más avanzados utilizan ya matemáticas muy sofisticadas, a partir de principios de los años ochenta. En los años noventa

la sofisticación matemática de las finanzas teóricas da otro salto y se ubica al nivel de la investigación matemática más demandante técnicamente. Se establecen los dos Teoremas fundamentales de las finanzas, y numerosos matemáticos de primera fila, especialmente probabilistas y analistas funcionales se dedican parcial o completamente a la investigación en lo que ya se denomina Finanzas Matemáticas (en inglés, Mathematical Finance).

En lo que va del siglo XXI, este desarrollo espectacular ha proseguido aún con más ímpetu : las finanzas matemáticas ya no sólo utilizan algunas de las matemáticas más avanzadas, sino que empiezan a retroalimentar e influir en algunos de los desarrollos matemáticos más recientes. Veremos esto con mayor detalle en la próxima sección.

En lo que resta de la presente sección, comentaremos acerca de lo que ocurrió alrededor de y en 1973, y de los antecedentes financieros, matemáticos y metodológicos que impulsaron el despegue de las finanzas matemáticas, así como el desarrollo mismo de éstas, a grandes rasgos, entre 1973 y 1981.

En 1973 se publica el artículo que todos reconocen como el acta de nacimiento de la moderna teoría de las finanzas y sobre todo de las finanzas matemáticas : el artículo de Fischer Black y Myron Scholes que incluye una fórmula explícta para la valuación de opciones de compra europeas (Black & Scholes (1973)). Ese mismo año, se funda el CBOE (Chicago Board of Options Exchange). Estos dos son los eventos más significativos, pero hay otros varios desarrollos tanto en la academia como en las instituciones financieras, así como en la escena internacional (especialmente las relacionadas con el inicio de las crisis petroleras que ocurrieron en 1973 y en 1979), que abrieron el camino para la consideración e implementación de diversas medidas y decisiones en las esferas política, financiera y académica, orientadas a expandir el comercio de derivados financieros, especialmente opciones y futuros.

En el ámbito académico, inicia un proceso de desarrollo teórico alrededor de la comprensión, uso y extensiones varias del modelo y fórmula de Black Scholes, así como otras cuestiones relacionadas con administración de riesgos, optimización de portafolios y modelos de equilibrio ecónomico en el área financiera. A un ritmo acelerado, durante el intervalo 1973-1981 comienzan a utilizarse herramientas matemáticas antes impensables para los profesionales de las finanzas : optimización avanzada, ecuaciones en derivadas parciales, métodos numéricos sofisticados, y desde luego, cálculo estocástico. La muy importante área probabilística de teoría de martingalas se introduce profunda y definitivamente en las finanzas a partir de los trabajos Harrison-Kreps-Pliska en el intervalo 1979-81. Por otra parte, en el *ámbito del tema académico denominado economia financiera ('Financial Economics') hay notables desarrollos durante los años setenta : los avances teóricos asociados a los conceptos de cobertura y replicación financiera, arbitraje, valuación mediante teoría de arbitraje, valuación neutral al riesgo, completez de mercados, así como a los temas más generales de administración de riesgo y selección óptima de portafolios. Algunos de los nombres importantes asociados con estos desarrollos incluyen a los más destacados economistas financieros de la década : Steve Ross, Steve Myers, Robert Jarrow, Robert Merton, Fischer Black, Peter Carr, Dilip Madan, Mark Rubinstein y varios otros.*

Por último, cabe mencionar que los conceptos de economía financiera mencionados arriba tienen antecedentes en los años sesenta e incluso antes. Y por su parte, las matemáticas "avanzadas" que se inyectaron en la teoría financiera durante los años setenta, distaban mucho de ser nuevas. En particular, el cálculo estocástico surgió en los años cuarenta principalmente en los trabajos del matemático japonés K. Itô, motivado por cuestiones varias de física-matemática. Sin embargo, el cálculo estocástico, especialmente a un nivel riguroso matemáticamente, permaneció durante décadas como un tesoro secreto y celosamente guardado, accesible para relativamente pocos probabilistas, y para algunos matemáticos aplicados que trabajaban en problemas muy específicos de ingeniería o biología. Fue la demanda generada en finanzas, via el modelo de Black Scholes y sus extensiones, la que expandió notablemente la difusión de este tema. En el presente (2013) existen docenas de libros de texto (particularmente de la editorial Springer) sobre cálculo estocástico a nivel graduado y pre-graduado. Y versiones varias del tema (en ocasiones muy poco rigurosas) se enseñan regularmente a lo largo de todo el mundo, no sólo en doctorados de matemáticas o economía financiera, sino en prácticamente todos los MBA ('Master on business administration) y en algunas licenciaturas.

A.2 El área de finanzas matemáticas.

Como se afirmó en la sección anterior, en las finanzas matemáticas (o 'Mathematical Finance' en inglés) se introdujeron, a partir de 1973, el uso de matemáticas cada vez más avanzadas (cálculo estocástico, análisis funcional y ecuaciones en derivadas parciales, entre otras), se produjeron resultados al más alto nivel de investigación matemática (los dos 'Teoremas fundamentales de las finanzas', así como muchos otros avances), y recientemente, las finanzas matemáticas han empezado a retroalimentar e influir en la *investigación matemática 'pura' que se lleva a cabo en algunas áreas bien establecidas de la matemática, sobre todo en la teoría de procesos estocásticos. En esta sección detallamos un poco más estas afirmaciones, pero recomendamos leer o revisar algunas de las referencias, especialmente Delbaen & Schachermayer (2006); Karatzas (1997); Karatzas & Shreve (1998); Schachermayer (1998); Bru & Yor (2002); Jarrow & Protter (2004); Yor et al (2008).*

Enseguida enlistamos a los principales matemáticos que han contribuido al desarrollo del tema, así como a las áreas de la matemática que más han interactuado con finanzas.

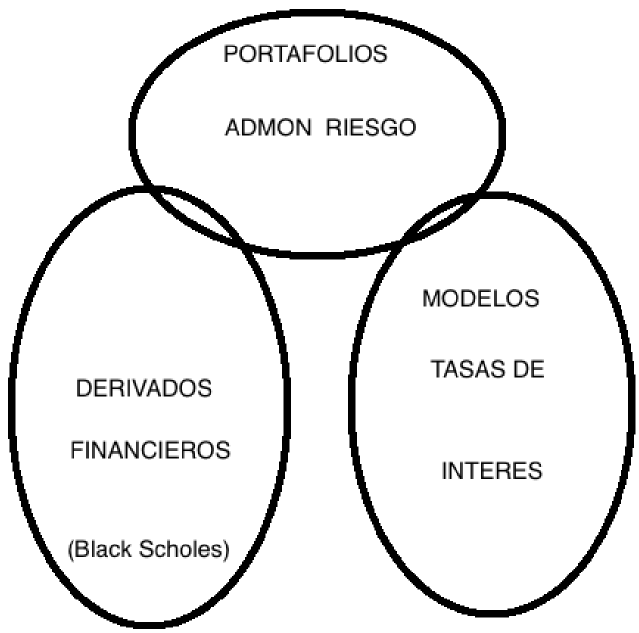
Matemáticos. *A partir de 1981, un número creciente de matemáticos de primera fila, así como muchos otros, han dedicado parcial o completamente sus esfuerzos en investigación al desarrollo de este tema. Entre otros, podemos mencionar a los analistas funcionales Walter Schachermayer y Freddy Delbaen, al analista/probabilista Paul Malliavin, recientemente fallecido, al conocido analista Elias M. Stein, a los especialistas en ecuaciones en derivadas parciales D. Isakov,*
E. Barucci, V. Vespri, y a la mayor parte de los principales probabilistas a nivel internacional, como Marc Yor, Philip Protter, Hans Föllmer, Jean Jacod, A.V. Skorohod, Albert Shiryaev, Ionannis Karatzas, Steve Shreve, Eckhard Platen, Bert Oksendal, Nicole El Karoui. También, los economistas y financieros con más alto 'background' matemático han colaborado intensamente en el tema. Destacan Paul Samuelson, Robert Merton, Robert Jarrow, Darrel Duffie, Peter Carr, Dilip Madan.
La anterior lista incluye o involucra premios nóbel de economía (Samuelson, Merton), profesores de matemáticos al nivel de medallas Fields (F. Delbaen fue maestro de Jean Bourgain y E.M. Stein lo fue de C. Fefferman y T. Tao) y muchos otros importantes reconocimientos. W. Schachermayer recibió el premio 'Ludwig Wittgenstein', la más alta presea científica de Austria y una de las más prestigiadas a nivel internacional, por el que es quizás el resultado más sobresaliente (hasta la fecha) en finanzas matemáticas : la demostración, rigurosa y detallada, en trabajo conjunto con F. Delbaen, de la versión general del Primer Teorema Fundamental de Valuación de Activos (Delbaen & Schachermayer (1994, 1998)). Este trabajo de cerca de 100 páginas de análisis funcional y análisis estocástico coloca las finanzas matemáticas al más alto nivel de investigación. Por último, el hecho de que se le otorgara el premio 'Gauss' de matemáticas aplicadas a Kiyosi Itô, el fundador del cálculo

estocástico, se debe en buena medida a la importancia central del 'Cálculo de Itô' en finanzas matemáticas.

Conexiones con otras áreas. *En el contexto de la matemática misma, y en especial en el de la teoría de probabilidad y procesos estocásticos, el área de finanzas matemáticas ha influido de manera crucial en la última década. Originalmente motivados por la inyección de Cálculo Estocástico elemental que llevaron a cabo Merton, Black y Scholes en el período 1969-1973, un número cada vez más considerable de matemáticos y economistas matemáticos se fueron involucrando en el tema, y a partir del intervalo 1979-1981, cuando Harrison, Kreps y Pliska introducen la Teoría de Martingalas en el estudio de mercados financieros, comienza un desarrollo matemático verdaderamente notable por la rapidez, profundidad y sofisticación de las herramientas matemáticas involucradas. Más aún, no sólo se aplicaron matemáticas ya conocidas a finanzas, sino que la interacción con éstas renovó el uso y consideración de importantes áreas de la teoría de probabilidad y procesos estocásticos, e incluso en fechas más recientes, dicha interacción ha promovido y orientado avances centrales. Algunas de las áreas involucradas son : los desarrollos recientes acerca de la teoría del movimiento browniano, incluído el movimiento browniano fraccional; la teoría de semi y sigma-martingalas; los teoremas de representación de martingalas en tiempo continuo; teoría de Cameron-Martin-Girsanov; Procesos de Levy; Expansiones de caos y 'white noise analysis'; Teoría de Kunita-Ikeda-Watanabe sobre flujos generados por ecuaciones diferenciales estocásticas; ecuaciones diferenciales estocásticas con retardos en dimensión infinita; ecuaciones diferenciales parciales estocásticas; teoría de ecuaciones diferenciales estocásticas backward-forward; integración estocástica general, incluyendo las integrales de Jacod-Meyer, Skorohod y Wick.*
El nivel de dificultad, elegancia y sofisticación del tema puede verse claramente en numerosos libros de editoriales como Springer, Birkhäuser o Kluwer y en decenas de artículos publicados en algunas de las mejores revistas, tales como Matematische Annalen, Journal of Mathematical Analysis and its Applications, Mathematical Finance, Stochastic Processes and their applications y muchas otras. Los autores de tales libros y artículos incluyen, entre muchos otros, a los destacados matemáticos y teóricos mencionados en el inciso anterior.

En conclusión, puede decirse que si bien el modelado matemático y algunas de las aplicaciones de diversas áreas de la matemática a las finanzas 'prácticas' pueden ser discutibles (sobre todo a partir de la crisis financiera *de 2008 – 2010) de lo que no hay duda es que Finanzas matemáticas (‘Mathematical finance’) es un área sólida y rigurosa de la matemática y se encuentra hoy día en plena efervescencia.*

A.3 Mapa de finanzas matemáticas :



FINANZAS MATEMATICAS

RESUMEN.

- ***Finanzas hasta 1973 : técnica matemática elemental (optimización básica, álgebra lineal, estadística), con la excepción del trabajo de L. Bachelier (1900), casi desconocido hasta los años sesenta.***

- ***1973 : Modelo y fórmula de Black Scholes; fundación del Chicago Board of Options Exchange; etc.***

- ***1973 – 1981 : desarrollos varios, utilizando cálculo estocástico, optimización avanzada y ecuaciones en derivadas parciales.***

- ***1981 – 1992 : introducción de la teoría de martingalas y perfeccionamiento de varios conceptos de economía financiera.***

- ***1992 – 1999 : teoremas fundamentales de finanzas matemáticas; interacción fuerte con teoría de procesos estocásticos; desarrollos conceptuales varios.***

- ***1999 – 2013 : interacción fuerte con varias ramas de la matemática; influencia en desarrollos recientes de procesos estocásticos como el MBf, procesos de Levy, etc.***

- ***1973 – 2013 : <u>en cuanto a contenido</u>, los temas principales han sido valuación y cobertura de derivados financieros, especialmente opciones de muy variada clase. A partir de 1978, modelos estocásticos de tasas de interés.***

B. El modelo de mercado a 1 período.

Referencias : En esta sección seguiremos **muy de cerca** *Björk (2005).*
Un texto más riguroso y con un contexto más general es : S. Pliska (2001). También puede utilizarse Shreve (2004) vol. I. Por último, uno de los mejores textos disponibles, que incluye mucho material, así como gran claridad conceptual y matemática es LeRoy & Werner (2001).

El tiempo, denotado por t, toma dos valores : $t = 0$ *("hoy") y* $t = 1$ *("mañana"), por lo que en realidad tenemos sólo* **un período.** *El mercado consta de dos activos :* ***bonos****, el activo 'no riesgoso' y el* ***'stock'*** *(acervo), o 'activo riesgoso'. En adelante los llamaremos simplemente "bono" y "activo", respectivamente. El proceso (determinístico) del bono está dado por*

$$B(0) = 1; \quad B(1) = 1 + r$$

donde r es la tasa de interés de contado ('spot') del período. Se puede interpretar como la tasa de un banco o del mercado de dinero, y más adelante como la ***tasa libre de riesgo*** *(CETES, Treasury bills)**.** La dinámica del activo riesgoso está dada por*

$$S(0) = s; \qquad S(1) = \begin{cases} s \cdot u, & prob.\ p_u \\ s \cdot d, & prob.\ p_d \end{cases}$$

con $p_u\,,\ p_d > 0; \quad p_u + p_d = 1,$ *y desde luego* $d < u.$ *Lo escribiremos también como*

$$S(1) = s \cdot Z$$

donde Z es una variable aleatoria que toma los valores u (con probabilidad p_u *) ó d (con probabilidad* p_d *). Implícitamente estamos trabajando sobre un espacio de probabilidad* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *en donde* $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$ *(dos "estados del mundo"),* $\mathcal{F}$ *es el conjunto potencia de* Ω *(la sigma álgebra maximal) y*

$$P(\{\omega_u\}) = p_u \quad ; \quad P(\{\omega_d\}) = p_d$$

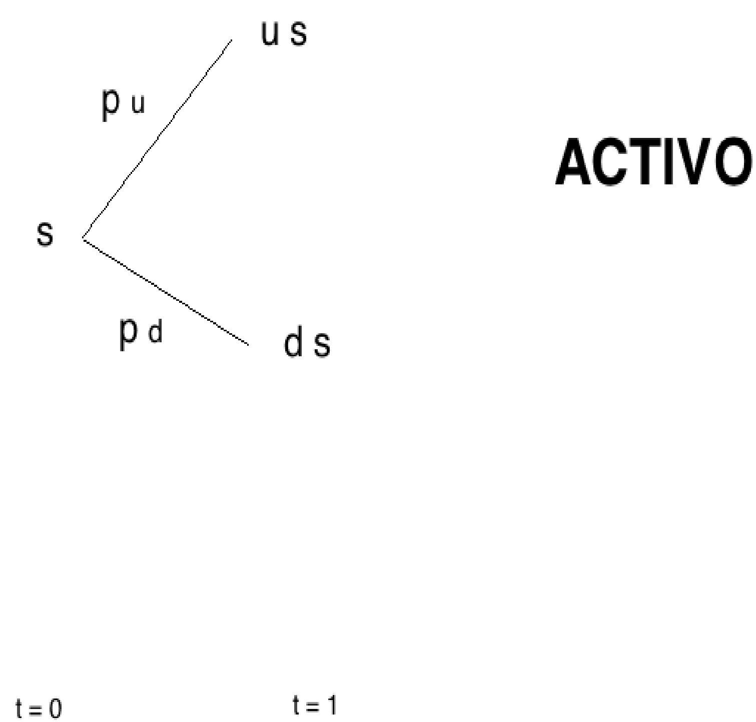
todos los números anteriores son conocidos, incluido el precio actual del activo riesgoso s. La incertidumbre se representa por el hecho de qué no sabemos con certeza cuál de los dos estados del mundo ocurrirá; cada uno de ellos tiene cierta probabilidad positiva de ocurrir.

Un diagrama :

$$1 \quad \longrightarrow \quad 1(1+r) \qquad \textbf{\textit{Bono.}}$$

Inversión: $\quad A\,\$ \quad \rightarrow \quad (1+r)A$

Valor presente : $\quad \frac{1}{(1+r)}\,B \quad \rightarrow \quad B$



Consideraremos ***portafolios*** *en el mercado (Bono, Activo) dados como vectores bidimensionales* $q = (x, y)$*. La interpretación es que el portafolio q tiene x unidades de bono, así como y unidades de activo. Los valores positivos representan tenencia o posesión (posición 'larga') mientras que los negativos representan deudas, 'ventas en corto' ('short sales') o préstamos (posición 'corta').*

Hipótesis.

1. $x, y \in \mathbb{R}$.
2. *No hay diferencial 'bid – ask' (el precio de venta es igual al de compra).*
3. *No hay 'costos de transacción'.*
4. *El mercado es* ***completamente líquido.*** *Por ejemplo, siempre hay préstamos del banco en cualquier cantidad.*

Definición : *Si* $q = (x, y)$*, el* ***proceso del valor del portafolio es***

$$(Vq)(t) = x\,B(t) + y\,S(t); \qquad t = 0,1.$$

Desglosando :

$$(Vq)(0) = x + y\,s$$

$$(Vq)(1) = x(1 + r) + y\,s\,Z$$

Definición : *un portafolio de* ***arbitraje*** *es un portafolio q que satisface :*

i) $(Vq)(0) = 0$;

ii) $P[(Vq)(1) \geq 0] = 1$;

iii) $P[(Vq)(1) > 0] > 0$

El portafolio q es un ***arbitraje fuerte sii***

i) $(Vq)(0) = 0$;

ii) $P[(Vq)(1) > 0] = 1$.

Teorema: *en el modelo de mercado a un período se cumple*

a) ***No hay arbitraje*** *si y sólo si*

$$d < (1 + r) < u \qquad (*)$$

b) ***No hay arbitraje fuerte*** *si y sólo si*

$$d \leq (1 + r) \leq u \qquad (**)$$

Demostración : *ejercicio muy ilustrativo.*

Comentario : *el concepto de arbitraje es uno de los más importantes en finanzas matemáticas, y para algunos autores, el más importante de todos. Muchos enunciados de resultados cruciales en finanzas matemáticas tienen la estructura : "Suponiendo que no hay arbitraje, se sigue que ...".*

Comentario : *en realidad hay varios conceptos de arbitraje. En este modelo, el más sencillo posible, hay dos (arbitraje y arbitraje fuerte). A medida que el modelo se complica, sobre todo generalizando la estructura del espacio de probabilidad, surgen más variantes. Ver A. Sánchez – Peralta (2010).*

Medidas martingala equivalentes.

La doble desigualdad (*) equivale a que el número $(1+r)$ *sea una combinación convexa de u, d. Es decir, que existen dos números* $q_u, q_d > 0$ *con* $q_u + q_d = 1$ *tales que*

$$1 + r = q_u \cdot u + q_d \cdot d$$

Estos 'pesos' pueden interpretarse como probabilidades correspondientes a una nueva medida de probabilidad Q *en el espacio* $(\Omega, \mathcal{F})$ *definida por*

$$Q[Z = u] = q_u \, ; \quad Q[Z = d] = q_d$$

Si denotamos la esperanza con respecto a Q *como* E^Q *se tiene que*

$$\frac{1}{(1+r)} \, E^Q[S(1)] = \frac{1}{(1+r)} \, \{q_u \cdot u\, s + q_d \cdot d\, s\} = s$$

Tenemos entonces la siguiente ***Fórmula de valuación :***

$$\boxed{S(0) = \frac{1}{(1+r)} E^Q[S(1)]}$$

ésta es la ***fórmula de valuación neutral al riesgo,*** *mediante la cual obtenemos el precio del activo 'hoy' como el valor presente del precio esperado 'mañana'. A Q se le llama* ***medida martingala equivalente ó medida neutra al riesgo.***
Ahora podemos enunciar, en este contexto, el resultado que hasta 1998-1999 fue el resultado central de FM.

Teorema *(Versión 0.0 del 'Primer Teorema Fundamental de Valuación de Activos' (PTFVA) ó 'Primer Teorema Fundamental de Finanzas' (PTFF)) :*

El modelo de mercado a un período es libre de arbitraje si y sólo si existe una medida martingala equivalente.

Proposición : *para este modelo, las probabilidades para la MME Q están dadas por*

$$q_u = \frac{(1+r)-d}{u-d} \ ; \qquad q_d = \frac{u-(1+r)}{u-d}$$

Demostración : *ejercicio muy sencillo.*

Reclamos contingentes ('contingent claims').

Comentario *: derivados financieros.*

Definición : *un reclamo contingente (derivado financiero) en el mercado a 1 período es una variable aleatoria de la forma $X = \Phi(Z)$, donde Z es la v.a. del mercado definida antes y Φ es una función apropiada (Borel medible).*
En términos prácticos, concretos, se trata de un **contrato,** *y Φ es la* <u>*función de contrato.*</u>

Comentario : *contratos.*

Ejemplo importante : opción de compra europea escrita sobre el activo riesgoso (subyacente).
El contrato se realiza entre dos partes : A, quien escribe y vende la opción, y B quien la compra y es el tenedor de la misma. La opción <u>*le otorga a B el derecho, pero no la obligación*</u> *de comprarle a A una determinada cantidad de activo (una unidad) por un precio determinado K, llamado precio de ejercicio ('strike), cuando $t = 1$. Aquí la función de contrato es*

$$\Phi(Z) = (Z - K)^+ = max\{Z - K, 0\},$$

O bien :

$$\Phi(u) = s\,u - K \ ; \ \Phi(d) = 0,$$

Bajo la hipótesis de que $sd < K < su$.

Denotemos el precio 'justo' (el precio de no arbitraje) para X *al tiempo* t *como* $\pi(t, X)$.

Proposición : *para que no haya arbitraje se requiere que* $\pi(1, X) = X$.

Prueba *: suponer lo contrario y construir un portafolio de arbitraje.*

El problema principal, y en principio muy difícil es encontrar $\pi(0, X)$.

Comentario importante. *Aún en este contexto tan extremadamente simple, puede verse el esquema general de trabajo en finanzas matemáticas : se trabaja "hacia atrás" ('backwards'). Con base en algunas suposiciones sobre el futuro (aquí,* $t = 1$ *), se obtienen resultados importantes, sobre todo valuaciones, para el presente* $(t = 0)$. ***Es completamente al revés de la idea usual de "predecir el futuro".***

Solución mediante alcanzabilidad y completez.

Definición : *un reclamo contingente X es* ***alcanzable*** *sii existe un portafolio q tal que* $(Vq)(1) = X$. *En ese caso se dice que el portafolio* ***replica*** *a X, y que es un portafolio de* ***cobertura.***

Comentario : *en un sentido puramente financiero, no hay distinción entre tener un reclamo contingente X y tener un portafolio q que lo replica.*

La posibilidad de replicar todos los derivados financieros es una propiedad importante de un mercado, significa que el mercado es suficientemente amplio, rico en cuanto a los activos que se mercadean en él como para poder reproducir prácticamente cualquier tipo de comportamiento financiero.
Esto nos lleva a un concepto sumamente importante, para muchos autores tan importante como el de arbitraje. Se trata de la completez del mercado.

Comentario : *el concepto de 'alcanzabilidad' proviene en términos generales de la teoría de control. En derivados financieros no se ha explotado esta conexión, pero en el tema mucho más profundo y difícil de tasas de interés, T.*

Björk y sus colaboradores han establecido conexiones profundas con teoría de control y con otras áreas clásicas de la matemática.

Ahora presentamos el segundo concepto más importante de FM. Para algunos autores, está a la par, si no es que más arriba en importancia, que el de arbitraje.

Definición : *el mercado a un período es* ***completo sii*** *todo reclamo contingente puede ser replicado dentro del mercado, es decir, para todo derivado financiero X, existe un portafolio q del mercado tal que* $(Vq)(1) = X$.

Teorema : *Si q replica a X,* ***entonces,*** *bajo la hipótesis de* ***no arbitraje,*** *forzosamente se cumple también que*

$$\pi(0, X) = (Vq)(0).$$

Demostración : *ejercicio.*

Los conceptos de arbitraje y completez mantienen una relación compleja cuando el espacio de probabilidad tiene una estructura complicada. En el caso del modelo a 1 período, dicha relación es muy sencilla. Tenemos el siguiente

Teorema : *en este modelo de mercado,* ***no arbitraje*** *implica* ***completez.***

Demostración : es inmediata, dado ***cualquier*** *reclamo X representado por una función contractual* Φ*, los 'pesos' del portafolio vienen dados por*

$$x = \frac{1}{(1+r)} \frac{u\,\Phi(d) - d\,\Phi(u)}{u-d} \; ;$$

$$x = \frac{1}{s} \frac{\Phi(u) - \Phi(d)}{u-d} \; ;$$

Problema / pregunta : *¿se cumple la implicación recíproca?*

Valuación neutral al riesgo.

Hemos visto que el modelo de mercado a un período es completo (bajo la hipótesis de no arbitraje). Entonces dado cualquier reclamo X tenemos que $\pi(0, X) = (Vq)(0)$ *donde el portafolio q está dado por los pesos de las fórmulas anteriores. Después de un poco de álgebra obtenemos :*

$$\pi(0, X) = x + s\, y$$

$$= \frac{1}{(1+r)} \left\{ \frac{(1+r)-d}{u-d} \Phi(u) + \frac{u-(1+r)}{u-d} \Phi(d) \right\}$$

Es decir,

$$\boxed{\pi(0, X) = \frac{1}{(1+r)} \{ q_u\, \Phi(u) + q_d\, \Phi(d) \}}$$

el lado derecho es el valor esperado del reclamo X bajo la medida de probabilidad Q. Tenemos entonces el siguiente

Teorema : *en el modelo a un período, el precio* ***libre de arbitraje*** *de un reclamo contingente X está dado por*

$$\boxed{\pi(0, X) = \frac{1}{1+r}\, E^Q[X]}$$

donde la medida martingala Q está unívocamente determinada por la ecuación

$$S(0) = \frac{1}{1+r}\, E^Q[S(1)]$$

de la cual se obtuvieron los valores para las probabilidades q_u, q_d.
La fórmula dentro de la caja es la "valuación neutral al riesgo" y a la MME Q se le llama también "medida neutral al riesgo".

En este sencillísimo ejemplo se encuentran ya los elementos principales de la ***valuación mediante el método de la martingala****. Más adelante veremos la prueba de la fórmula de Black Scholes mediante una expresión completamente similar a la de arriba, sólo que en un contexto matemático mucho más complicado (de hecho infinito – dimensional) :*

$$C(t) = e^{-r(T-t)} E^Q[(S(T) - K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

Algunos comentarios adicionales.

1. *El único papel jugado por la probabilidad "real" u "objetiva" P (con los valores p_u, p_d) es que ella determina cuáles eventos son posibles y cuáles imposibles. Ella determina la clase de equivalencia de las medidas de probabilidad a considerar.*

2. *Cuando calculamos el precio libre de arbitraje de un derivado financiero, llevamos a cabo los cálculos* ***como si viviéramos en el mundo neutral al riesgo.*** *Otra manera de decirlo es que las valuaciones basadas en la medida neutral al riesgo son las únicas en las que están de acuerdo todos los participantes en el mercado, independientemente de su propensión al riesgo.*

Sugerencia : *estudiar con cuidado el ejemplo numérico al final de la primera sección del capítulo 2 de Björk (2005).*

Comentario importante : generalizaciones.

- *El modelo anterior se generaliza fácilmente a cualquier número de períodos y se conoce como 'El modelo binomial'. Fue introducido por Cox, Rubinstein y Ross en 1979 como una ayuda pedagógica, para entender en el caso discreto el modelo y fórmula de Black Scholes. Sin embargo resulto ser un desarrollo con valor en sí mismo. Ver por ejemplo Shreve (2004) vol I.*
- *El modelo a un período también puede extenderse al caso de* ***varios activos****, lo cual lleva a interesantes consideraciones de álgebra lineal y optimización con el lema de Farkas (la versión finito dimensional del Teorema de Hahn – Banach).*

Ambas generalizaciones pueden verse en Björk (2005), ó en Pliska (2001).

VIERNES 3.

Antecedentes matemáticos (Cálculo estocástico).

REF : Arnold (1978); Karatzas & Shreve (1991); Steele (2001); Oksendal (2005); Klebaner (2006).

Procesos estocásticos.

Definición de proceso estocástico, notaciones.

Si $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *es un espacio de probabilidad, y* $T > 0$, *un proceso estocástico* X *en* $[0, T]$ *es una función*

$$X: [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$$

tal que para cada $t \in [0, T]$, *la función* $\omega \mapsto X(t, \omega)$ *es una variable aleatoria.*
El proceso estocástico puede verse entonces como una colección o familia de variables aleatorias indizada por $t \in [0, T]$.

Observación : Notaciones.

$$X(t, \omega) = X(t) = X_t = X_t(\omega)$$

Para cada $\omega \in \Omega$ *("estado del mundo"), la función* $t \mapsto X(t, \omega)$ *se llama trayectoria ('path').*

Observación : *el codominio puede ser* $\mathbb{R}^n$ *ó más general, un espacio de Banach.*

Observación : *el conjunto de índices, como se denomina a* $[0, T]$ *puede ser discreto, finito ó infinito y de cualquier dimensión, puede ser un espacio de Banach. Ver Revuz & Yor (1999).*

Distribuciones finito – dimensionales.

Escogemos $N \in \mathbb{N}$; $t_1, \dots, t_N \in [0,T]$ *y borelianos reales* $B_1, \dots, B_N$. *Definimos*

$$\mu_{t_1,\dots,t_N}(B_1 \times \dots \times B_N) = P[X(t_1) \in B_1, \dots, X(t_1) \in B_1]$$

con lo cual se obtiene una medida sobre la $\sigma -$ *álgebra de los borelianos en* $\mathbb{R}^N$. *A la colección de estas medidas, variando N y los* $t_i{}'s$ *se le llama la colección de las distribuciones finito – dimensionales del proceso X.*

Esperanza condicional.

Si Y *es una v.a. en* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *y* $\mathcal{G}$ *una sub –* σ *– álgebra de* $\mathcal{F}$*, la* ***esperanza condicional*** *de Y dada* $\mathcal{G}$*, la que denotaremos por* $E[Y|\mathcal{G}]$ *es una variable aleatoria Z que satisface lo siguiente :*

i) *Z es* $\mathcal{G}$ *- medible;*

ii) *Para todo* $A \in \mathcal{G}$ *se tiene que*

$$\int_A YdP = \int_A ZdP$$

Observación: *existencia de la esperanza condicional. La prueba requiere algo de herramienta. Ver Oksendal (2005)*

Propiedades :

1) *Linealidad;*

2) $E\big[E[Y|\,\mathcal{G}]\big] = E[Y]$

3) $E[Y|\mathcal{G}] = Y$ *si* Y *es* $\mathcal{G}$ *– medible.*

4) $E[Y|\mathcal{G}] = E[Y]$ *si* Y *es independiente de* $\mathcal{G}$.

5) $E[Z \cdot Y|\mathcal{G}] = Z \cdot E[Y|\mathcal{G}]$ *si* Z *es* $\mathcal{G}$ *– medible.*

Ejercicio : *probarlas.*

Martingalas.

Definición: *Dado un proceso X en* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *y una* ***filtración*** $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0,T]}$ *, decimos que X es una* ***martingala*** *con respecto a la filtración sii para todos* $s \leq t$ *se cumple que*

$$E[X(t)|\mathcal{F}_s] = X(s) \text{ c.s.}$$

Observación : $E[|X(t)|] < \infty$, *para todo t.*

Observación : *importancia de las martingalas. Teoría, dessigualdades, etc. Por ejemplo,*

Teorema : (Desigualdad de Doob, Pascucci (2009), # 3.38) : *Sea M martingala continua en* $[0,T]$ *. Entonces, para todo todo* $p > 1$ *se cumple*

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |M(t)|^p\right] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E[|M(T)|^p].$$

Además de su utilidad en procesos estocásticos, este tipo de desigualdades tiene conexiones profundas con temas de análisis matemático, como espacios de Hardy y teoría abstracta de interpolación.

Enseguida vamos a presentar un resumen muy apretado del principal ejemplo de proceso estocástico, el movimiento browniano o proceso de Wiener. La teoría de procesos estocásticos es en gran medida el estudio detallado de las propiedades de este proceso, así como de sus extensiones, generalizaciones y aplicaciones. El cálculo estocástico de Itô está basado en las propiedades específicas de este importante proceso.

Movimiento browniano o proceso de Wiener.

1827 Robert Brown ; 1900 Louis Bachelier; 1905 Einstein; 1923 Wiener; alr. 1940 Paul Levy; 1942 y después, K. Itô.

Definición : el MB estándar es un proceso estocástico $\{W(t)\}_{t \in [0,\infty)}$ *definido sobre un espacio de probabilidad completo* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *con valores reales que satisface*

i) $W(0) = 0$

ii) Para toda $t > 0$ *se tiene* $W(t) \sim N(0, t)$

iii) Tiene incrementos independientes : para $t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, *las v.a.*

$$W(t_1) - W(t_0), \qquad W(t_2) - W(t_1) \ldots W(t_m) - W(t_{m-1})$$

son independientes.

iv) Tiene trayectorias continuas, i.e. para cada $\omega \in \Omega$, *la función* $t \mapsto W(t, \omega)$ *es continua.*

***Teorema** : el MB existe. Además, puede ser construido de varias maneras. (Steele (2001), Revuz & Yor (1999)).*

Propiedades que se derivan de la definición.

1. Las funciones de esperanza y covarianza del MB son

$$\mu_W(t) = E[W(t)] \equiv 0 \, ;$$

$$c_W(t, s) = E[W(t)W(s)] = min\{s, t\}$$

*2. El MB es **martingala**,* $0 \leq s \leq t$ *se cumple*

$$E[W(t) | \mathcal{F}_s] = W(s), \quad c.s.$$

Definición. *Sea* $f: [0, T] \to \mathbb{R},\ p > 0.$ *Su variación p-ésima está dada por*

$$V_p(f;T) = sup_{\substack{\pi=\{0=t_0,t_1,\ldots,t_n\} \\ \pi \in \Pi}} \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|^p$$

Cuando $p = 2$, *la variación se llama cuadrática.*

Teorema de Levy *:* $[W, W](T) \coloneqq V_2(W;T) = T$ *c.s.*

Comentario : PROPIEDADES OSCILATORIAS DEL MB.

Teorema : *Casi seguramente, las trayectorias del MB son* ***no diferenciables en ningún punto.***
Teorema : *Casi seguramente, las trayectorias del MB son* ***de variación no acotada,*** *para cualquier intervalo* $[a, b] \subset [0, T]$.

Definición. *Un proceso* $X(t)$ *(*$t \in [0, T]$*) es auto-similar con exponente de Hurst H > 0 sii para todo* $\tau > 0$ *y para todos* $t_1, \ldots, t_N \in [0, T]$ *se cumple que*

$$(\tau^H X(t_1), \ldots, \tau^H X(t_N) \sim (X(\tau t_1), \ldots, X(\tau t_N))$$

Proposición *:* $W(t)$ *es auto-similar con* $H = \frac{1}{2}$.

Comentario 1 : Fractales.

Comentario 2 : Hurst, MBf.

Comentario 3 : Arbitraje y modelos financieros con MBf.

La integral estocástica o integral de Itô.

Antecedentes de integración de Riemann - Stieltjes.

Def: *la integral de Riemann, si existe es el límite*

$$\Re(f;[a,b]) = lim_{\pi,\xi}\, S(f;\pi;\xi;[a,b])$$

donde $S(f;\pi;\xi;[a,b]) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$*, y* $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$ *para* $i = 1, \ldots, n$.

Comentario : *particiones, redes y convergencia generalizada.*

Teorema de Lebesgue : *la integral de Riemann de f existe si y sólo si* $\mu\big(Disc(f)\big) = 0$.

Integral de Stieltjes: *f es el* <u>*integrando*</u>*, g el* <u>*integrador*</u>*. La integral de Stieltjes de f con respecto a g es el límite, si existe*

$$\int_a^b f dg = I_{RS}(f;g) = lim_{\pi,\xi} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(g(t_i) - g(t_{i-1}))$$

Ej 1 : *si* $g(x) = x$, $I_{RS}(f;g) = \Re(f)$.

Ej 2 : *Si f es continua y* $V_1(g) < \infty$*, entonces existe* $I_{RS}(f;g)$. (Teoría clásica de Stieltjes).

Ej 3 : *Teorema de Young* (Acta Math 1936, vol 67, p 251-282). *Si*

(i) $Disc(f) \cap Disc(g) = \emptyset$,

(ii) *existen* $p, q > 0$ *con* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > 1$ *tales que* $V_p(f)$, $V_q(g) < \infty$,

entonces *existe* $I_{RS}(f;g)$.

Conclusión para $\int_a^b f dW$*: suponiendo que f es de clase* C^1 *en* $[a,b]$*, para cada trayectoria browniana* ***la integral existe****, pues en ese caso* $V_p(f) < \infty$ *con* $p = 1$*, y como* $V_2(W) < \infty$*, tenemos* $q = 2$*, y* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{2} > 1$.

Conclusión para $\int_a^b W dW$. *En este caso* $p = q = 2$ *y no se pueden mejorar* (a la baja), *por lo que no aplica el Teorema de Young.*

LA INTEGRAL ESTOCASTICA.

Ejemplo muy ilustrativo : $\int_a^b W dW$. *Considere una partición*

$\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots t_n = t\}$, *y sea*

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} W(t_{i-1})\big(W(t_i) - W(t_{i-1})\big)$$

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} W(t_{i-1})\Delta_i W = \frac{1}{2} W(t)^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} (\Delta_i W)^2$$

$$= \frac{1}{2} W(t)^2 - \frac{1}{2} \mathrm{X}_n(t).$$

Tenemos que

$$E[\mathrm{X}_n(t)] = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = t$$

$$var\big(\mathrm{X}_n(t)\big) = \sum_{i=1}^{n} [E[(\Delta_i W)^4] - (\Delta_i t)^2]$$

como $E[(\Delta_i W)^4] = E\left[\left(W(t_i - t_{i-1})\right)^4\right]$

$$= E\left[\left(\,(\Delta_i t)^{\frac{1}{2}}\,W(1)\right)^4\right] = 3(\Delta_i t)^2$$

entonces

$$var\big(\mathrm{X}_n(t)\big) = 2\sum_{i=1}^{n} (\Delta_i t)^2 \leq 2t\|\pi\| \rightarrow 0,$$

si $\|\pi\| \rightarrow 0.$

Como $var\big(\mathrm{X}_n(t)\big) = E[(X_n(t) - t)^2]$, *entonces se tiene el siguiente*

<u>Teorema</u> ***:*** **(a)** *para cada* $t \geq 0$, $X_n(t) \rightarrow t$ en $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, *y consecuentemente,* **(b)** *existe una subsucesión* $Y_k = X_{n_k}$ *tal que* $X_n(t) \rightarrow t$, ***<u>c.s.</u>***

Basados en lo anterior, podemos hacer la siguiente interpretación $(\Delta_i W)^2 \sim \Delta_i t$, *pues* $E[\Delta_i W] = 0$, *y* $E[(\Delta_i W)^2] = \Delta_i t$. *En forma simbólica y compacta,*

$$(1)\quad (\Delta B)^2 \sim \Delta t \qquad\qquad (2)\quad (\mathrm{d}B)^2 = \mathrm{d}t$$

Entonces, provisionalmente escribimos

$$"\int_0^t W dW = \frac{1}{2}\left((W(t))^2 - t\right)"$$

La integral de Itô para procesos simples

Consideremos un espacio de probabilidad filtrado para el browniano estándar $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0}, P)$, *donde* $\mathcal{F}_t = \sigma\{W(t): 0 \leq t < \infty\}$ *y restringimos todo a un horizonte temporal finito* $[0, T]$.

Definición: *Un proceso* $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ *es **simple** sii existen una partición* $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots t_n = T\}$ *y v.a.* $Y_1, \dots, Y_n$ *tales que para* $i = 1, \dots, n$

(a) Y_i es $\mathcal{F}_{t_{i-1}} -$ *medible* ;

(b) $E[Y_i^2] < \infty$;

(c) Si $0 \leq t < T$, entonces $X(t) = \sum_{i=1}^{n} Y_i 1_{[t_{i-1}, t_i)}$;
$X(T) = Y_n$.

Definición : *Si* $X(t)$ *es un proceso simple, su integral de Itô está dada por*

$$\int_0^T X(s)dW(s) := \sum_{i=1}^{n} X(t_{i-1})\Delta_i W = \sum_{i=1}^{n} Y_i \Delta_i W,$$

y si $t \in [t_{k-1}, t_k]$ *tenemos que*

$$\int_0^t X(s)dW(s) = \int_0^t X(s)1_{[0,t]}dW(s) = \sum_{i=1}^{k-1} Y_i \Delta_i W$$

$$+ \ Y_k(W(t) - W(t_{k-1}))$$

$$\boxed{\begin{array}{c}(***)\ \boldsymbol{Comentario\ muy\ importante}:\ \boldsymbol{Punto\ de\ la\ izquierda}. \\ Itô, Stratonovich, MacShane. Martingalas. Aplicaciones.\end{array}}$$

Propiedades básicas. *Sea* $I(X)(t) = \int_0^t X(s)dW(s)$, *para* $0 \leq t \leq T$. *Entonces*

(1) $E[I(X)(t)] = 0$;

(2) Linealidad ;

(3) $\int_0^T X(s)dW = \int_0^t X(s)dW + \int_t^T X(s)dW$,

(4) $E\left[\left(\int_0^t X(s)dW\right)^2\right] = \int_0^t E[X(s)^2]dW$

(5) $\{I(X)(t)\}_{t\in[0,T]}$ es $\{\mathcal{F}_t\}_{t\geq 0} -$ martingala.

Prueba de (4) : *que las esperanzas son finitas se sigue de la propiedad* (1), *y la adaptabilidad se sigue de la definición de la filtración y de las propiedades de las v.a.* Y_i. *La igualdad de martingalas se ve separando en dos casos. Primero, si* $s, t \in [t_{k-1}, t_k]$, *con* $s < t$, *tenemos que*

$$I(X)(t) = I(X)(t_{k-1}) + Y_k\big(W(s) - W(t_{k-1})\big)$$

$$+ Y_k\big(W(t) - W(s)\big)$$

$$= I(X)(s) + Y_k\big(W(t) - W(s)\big)$$

el primer término y Y_k *son* $\mathcal{F}_s -$ *medibles, y el incremento browniano es independiente de* $\mathcal{F}_s$, *luego* $E[I(X)(t)|\mathcal{F}_s] = I(X)(s) + 0 = I(X)(s)$. *El otro caso queda como ejercicio.*

Prueba de (5), ***<u>la isometría de Itô.</u>*** *Considere* $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \cdots t_k = t\}$. *Escribimos* $Z_i = Y_i\Delta_i W$. *Entonces*

$$E[I(X)(t)^2] = E[\sum_i Z_i \sum_j Z_j]$$

$$= E\left[\sum_{i,j} Z_i\, Z_j\right] = \sum_{i,j} E[Z_i Z_j]$$

$$= \sum_i E[Z_i{}^2]$$

$$= \sum_i E[(Y_i \Delta_i W)^2] = \sum_i E[(Y_i)^2] E[(\Delta_i W)^2]$$

$$= \sum_i E[(Y_i)^2](t_i - t_{i-1}) = \int_0^t E[X(s)^2] dW$$

La integral de Itô en el caso general.

Def : *un proceso* $\{X(t)\}_{t \in [0,T]}$ *es* ***admisible*** *sii*

(A) *está adaptado a la filtración;*

(B) $\int_0^T E[X(s)^2] ds < \infty$.

Ej 1 : *un proceso simple es admisible.*

Ej 2 : $X(t)$ *es determinístico y* $\int_0^T X(s)^2 ds < \infty$. *En este caso la integral de Itô es la de Wiener.*

Ej 3 : $X(t) \equiv W(t)$.

Lema fundamental : *Si* $\{X(t)\}_{t \in [0,T]}$ *es admisible,* ***entonces*** *existe una sucesión de procesos simples* $(\{X_n(t)\}_{t \in [0,T]})_{n \in \mathbb{N}}$ *que cumplen*

(i) $\lim_{n \to \infty} \int_0^T E\left[\left(X_n(s) - X(s)\right)^2\right] ds = 0;$

(ii) *existe un proceso* $\{I(X)(t)\}_{t \in [0,T]}$ *tal que*

$$\lim_{n\to\infty} E[sup_{\,t\in[0,T]}\ \{\big(I(X_n)(t) - I(X)(t)\big)\}^2] = 0.$$

<u>Al proceso</u> $\{I(X)(t)\}_{t\in[0,T]}$ *se le llama* ***<u>integral estocástica o integral de Itô, y se denota por</u>***

$$I(X)(t) = \int_0^t X(s)dW\ , \quad 0 \le t \le T.$$

Propiedades básicas. *Sea* $\{X(t)\}_{t\in[0,T]}$ *admisible, entonces*

(1) $E\left[\int_0^t X(s)dW(s)\right] = 0$;

(2) Linealidad ;

(3) Aditividad en el dominio :

$$\int_0^t X(s)dW(s) = \int_0^u X(s)dW(s) + \int_u^t X(s)dW(s)$$

(4) $E\left[\left(\int_0^t X(s)dW(s)\right)^2\right] = \int_0^t E[X(s)^2]ds$ (*isometría de Itô*).

(5) $\left\{\int_0^t X(s)dW(s),\right\}_{t\in[0,T]}$ *es una* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\ge 0}$ − martingala.

Teorema (existencia de la integral estocástica) : *la integral de Itô existe para procesos adaptados y que satisfacen la condición*

$$\int_0^T X^2(t)dt < \infty, \quad \underline{\textbf{con probabilidad 1.}}$$

Más aún, se cumple la linealidad. Pero las otras propiedades (media cero, propiedad de martingala e isometría de Itô), *requieren de la condición (B). Ver Klebaner (2006).*

Corolario : *Si* f *es continua en* $[0, T]$ *, entonces la integral* $\int_0^T f\big(W(t)\big)\, dW(t)$ *está bien definida* (existe).

Ejemplos.

1. $I = \int_0^1 t dW(t)$. *La integral está bien definida y se cumple* (B). *Los momentos son :* $E[I] = 0$, $E[I^2] = 1/3$.

3. *¿Para cuáles valores de* α *está definida la integral* $I = \int_0^1 (1-t)^{-\alpha} dW(t)$? *Se requiere que:*

$$\int_0^1 (1-t)^{-2\alpha} dW(t) < \infty, \text{ i.e., } \alpha < 1/2.$$

3. $\int_0^1 W(t)dW(t)$. *Aquí*

$$E\left[\int_0^1 W^2(t)dW(t)\right] = E\left[\int_0^1 t dt\right] = \frac{1}{2} < \infty,$$

la integral estocástica existe, tiene media cero y varianza 1/2.

4. $I = \int_0^1 e^{W(t)} dW(t)$. *La integral existe. Más aún,*

$$E\left[\int_0^1 e^{2W(t)}dB(t)\right] = \int_0^1 E[e^{2W(t)}]dB(t) = \int_0^1 e^{2t}dt = \frac{1}{2}(e^2 - 1) < \infty.$$

I tiene media cero y varianza

$$E\left[(\int_0^1 e^{W(t)}dW(t))^2\right] = \frac{1}{2}(e^2 - 1).$$

5. $J = \int_0^1 e^{W(t)^2}dW(t)$. *Está bien definida, pero*

$$\int_0^1 E[e^{2W(t)^2}]dt = \infty,$$

entonces no podemos asegurar que tenga momentos finitos. De hecho, no los tiene. (Ejercicio)

Proposición. *Sean* $X(t), Y(t)$ *procesos admisibles,* $\Longrightarrow$

$$E\left[(\int_0^t X(s)dW(s))(\int_0^t Y(s)dW(s))\right] = \int_0^t E[X(s)Y(s)]ds$$

Ejercicio : *probarla usando la isometría de Itô.*

PROCESOS DE VARIACION CUADRATICA

Def : *Para procesos* $X(t), Y(t)$, *sea* $[X, Y](t) =$

$$lim_\pi \sum_{i=1}^n (X(t_i) - X(t_{i-1}))(Y(t_i) - Y(t_{i-1}))$$

el límite de la red es en probabilidad. Se llama la ***covariación*** *de X, Y. Además,*

$$[X,X](t) = \langle X\rangle(t)$$

es la ***variación cuadrática de*** *X, lo que anteriormente denotamos por* $V_2(X)$ *donde X representa una trayectoria fija del proceso.*

Ejemplo : *Si* $f(t)$ *es determinística y continua, entonces* $\langle\int_0^t f(s)ds\rangle\,(t) = 0$.

Teorema : *Si X es admisible,*

$$\langle\int_0^t X(s)dW(s)\rangle\,(t) = \int_0^t X(s)^2 ds = \int_0^t X(s)^2 d\langle W\rangle(s)$$

Corolario : *Si* $\int_0^T X(s)^2 ds > 0$ *, entonces la integral estocástica* $\int_0^T X(s)dW(s)$ *tiene primera variación infinita, pues en caso contrario, su segunda variación sería cero,* ⇒⇐ .

Proposición :

(i) $[X,Y] = [Y,X]$

(ii) $[aX + bY, Z] = [aX, Z] + [bY, Z]$

(iii) $[X,Y] = \frac{1}{4}(\langle X+Y\rangle - \langle X-Y\rangle)$

$$= \frac{1}{2}(\langle X+Y\rangle - \langle X\rangle - \langle Y\rangle)$$

(iv) $|[X,Y]| \leq \langle X\rangle\langle Y\rangle$

Lema de Itô o Regla de la Cadena Estocástica.

Primera versión: $Y(t) = f(W(t))$, *con* $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) = C^2(\mathbb{R})$.

A. **Motivación:** *al estilo de los físicos,*

$$f\big(W(t) + dW(t)\big) = f'\big(W(t)\big)dW(t) + \frac{1}{2}f''\big(W(t)\big)\big(dW(t)\big)^2 + \frac{1}{3}f'''\big(W(t)\big)\big(dW(t)\big)^3 + \cdots$$

$$\approx f'\big(W(t)\big)dW(t) + \tfrac{1}{2}f''\big(W(t)\big)dt$$

Enunciado: *Sea* $f \in C^2(\mathbb{R})$, *entonces*

$$f\big(W(t)\big) = \int_0^t f'\big(W(s)\big)dW(s) + \int_0^t \frac{1}{2}f''\big(W(s)\big)ds$$

o bien decimos que $Y(t) = f(W(t))$ *tiene diferencial estocástica dada por*

$$\boxed{dY(t) = f'\big(W(t)\big)dW(t) + \frac{1}{2}f''\big(W(t)\big)dt}$$

Comentario : *éste es el caso más simple posible de la fórmula de Itô, pero aquí se encuentran ya los elementos básicos del 'fenómeno', el cual es el que le da al cálculo estocástico (de Itô) sus propiedades y "sabor" característicos.*

El cálculo estocástico es el resultado de combinar (esencialmente haciendo composiciones de) funciones ***diferenciables*** *con funciones* ***de variación no acotada, no diferenciables****, y proceder a 'imitar' hasta cierto punto, el cálculo ordinario.*

Los teoremas clásicos del cálculo que se cumplen, algunos con modificaciones, son : ***la regla de la cadena; el desarrollo de Taylor; la regla de Leibniz para diferenciación bajo el signo integral; el teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales ordinarias; el teorema de Fubini.***

No se conocen versiones estocásticas apropiadas para : ***el teorema del valor medio, ni para los teoremas de función inversa e implícita.*** *Esto último constituye un buen problema abierto, quizás muy elusivo, en el cual la parte más difícil es encontrar el enunciado correcto, apropiado.*
Un poco más general,

$$f\big(W(t)\big) - f\big(W(s)\big)$$

$$= \int_s^t f'\big(W(u)\big)dW(u) + \int_s^t \frac{1}{2} f''\big(W(u)\big)du$$

Ejemplos.

1. $f(t) = \frac{1}{2}t^2$. *Entonces* $f'(t) = t, \quad f''(t) = 1,$ *y*

$$\tfrac{1}{2}W(t)^2 - \tfrac{1}{2}W(s)^2 = \int_s^t W(u)dW(u) + \tfrac{1}{2}(t-s),$$

en particular $\int_0^t W(u)dW(u) = \frac{1}{2}(W(t)^2 - t)$. *Por último, en forma diferencial*

$$d(W(t)^2) = 2W(t)dW(t) + dt.$$

2. *Calcularemos* $E[W(t)^4]$. *Consideremos*

$f(x) = x^4,\ y\ \ f'(x) = 4x^3,\ f''(x) = 12x^2.$

$$W(t)^4 = \int_0^t 4W(s)^3 dB(s) + \frac{1}{2}\int_0^t 12W(s)^2\, ds,$$

$$E[W(t)^4] = 0 + 6\int_0^t E[W(s)^2]ds = 3t^2$$

En particular, $E[W(1)^4] = 3.$

3. *Calcular* $y(t) = E\left[e^{\lambda W(t)}\right],\ t \geq 0.$

Sea $X(t) = e^{\lambda W(t)}$*. Entonces*

$$dX(t) = \frac{1}{2}\lambda^2 X(t)dt + \lambda X(t)dW(t),$$

$$X(t) = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t X(s)\, ds + \lambda\int_0^t X(s)dW(s),$$

$$y(t) = E[X(t)] = 1 + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^t y(s)\, ds,$$

i.e., $y'(t) = \frac{\lambda^2}{2}y(t);\ \ y(0) = 1,\ \Longrightarrow y(t) = e^{\frac{\lambda^2}{2}t},$

así : $E\left[e^{\lambda W(t)}\right] = e^{\frac{\lambda^2}{2}t}.$

Lema de Itô, segunda versión.

Motivación : *sea* $X(t) = f(t, W(t))$, *entonces*

$X(t + dt) = f(t + dt, W + dW)$

$$= f(t, W) + f_t(t, W)dt + f_W(t, W)dW$$

$$+\frac{1}{2}f_{tt}(t,W)(dt)^2 + f_{tW}(t,W)dt\ dW$$

$$+\frac{1}{2}f_{ww}(t,W)(dW)^2 + \cdots$$

$$\approx f(t,W) + f_t(t,W)dt + f_W(t,W)dW + \frac{1}{2}f_{ww}(t,W)\ dt$$

Enunciado segunda versión : *si* $f\colon [0,\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
es de clase $C^{1,2}$*, entonces*

$$f\big(t,W(t)\big) - f\big(s,W(s)\big) = \int_s^t f_1\big(u,W(u)\big)du$$

$$+\int_s^t f_2\big(u,W(u)\big)dW(u) + \tfrac{1}{2}\int_s^t f_{22}\big(u,W(u)\big)du.$$

En forma diferencial, si $X(t) = f(t,W(t))$,

$$\boxed{dX(t) = \left(f_1\big(t,W(t)\big) + \frac{1}{2}f_{22}\big(t,W(t)\big)\right)dt + f_2\big(t,W(t)\big)\ dW(t)}$$

Ejemplo : MBG. *Sean* $\mu,\sigma > 0$,

$$f(t,x) = \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\ x\right) = e^{(\alpha t + \mu x)}$$

$$f_1 = \alpha f; \quad f_2 = \sigma f; \quad f_{22} = \sigma^2 f$$

si $X(t) = f(t,W(t))$, *entonces* $X(0) = 1$,

$$X(t) = 1 + \mu \int_0^t X(u)du + \sigma \int_0^t X(u)dW(u)$$

en forma diferencial :

$$\boxed{dX(t) = \mu\, X(t)dt + \sigma\, X(t)dW(t)}$$

Procesos de Itô.

Un proceso de Itô satisface, para $0 \le t \le T$

$$X(t) = X_0 + \int_0^t b(u)du + \int_0^t \sigma(u)dW(u) \quad \textit{c.s.}$$

o

$$dX(t) = b(t)dt + \sigma(t)dW(t)$$

donde X_0 *es una v.a. y* $b(t)$*,* $\sigma(t)$ *son procesos adaptados a la filtración browniana, tales que*

(i) $E[|X_0|] < \infty$

(ii) $\int_0^T [|b(u)| + \|\sigma(u)\|^2] < \infty$

Covariación y variación cuadrática. *Si* $X(t)$ *es un proceso de Itô, entonces*

$$\langle X\rangle(t) = \int_0^t \sigma^2(u)du \;; \qquad d\langle X\rangle(t) = \sigma^2(t)dt$$

Demostración completa : Steele 8.6, pp 129-130.

Si tenemos otro proceso de Itô, digamos,

$$dY(t) = a(t)dt + \xi(t)dW(t)$$

entonces

$$[X,Y](t) = \int_0^t \sigma(s)\xi(s)ds$$

<u>*Demostración*</u> *en Klebaner, pp 101-103.*

Notación : $d[X,Y](t) = dX(t)dY(t)$

La caja estocástica :

	dt	dW
dt	0	0
dW	0	dt

Así : $dX(t)dY(t) = \sigma(t)\xi(t)dt.$

(*) Integración con respecto a un proceso de Itô :

Si $X(t)$ *es un proceso admisible,* $Y(t)$ *un proceso de Itô, con*

$$dY(t) = a(t)dt + \zeta(t)dW(t),$$

entonces

$$\int_a^b X(t)dY(t) = \int_a^b X(t)a(t)dt + \int_a^b X(t)\xi(t)dW(t)$$

Motivación para el caso general de la fórmula de Itô.

Sean X, Y *procesos de Itô, y escribamos*

$$Z(t) = f(t, X(t), Y(t)) = f(P(t))$$

Entonces

$$dZ(t) =$$

$$f_1\big(P(t)\big)dt + f_2\big(P(t)\big)dX(t) + f_3\big(P(t)\big)dY(t) +$$

$$+\frac{1}{2}\{ f_{22}\big(P(t)\big)d\langle X\rangle(t) + 2f_{23}\big(P(t)\big)d[X,Y](t)$$

$$+f_{33}\big(P(t)\big)d\langle Y\rangle(t) \}$$

Ejemplo: $f = f(x,y) = xy$. *Si* $Z(t) = X(t)Y(t)$,

$$dZ(t) = X(t)dY(t) + Y(t)dX(t) + d[X,Y](t),$$

o bien en forma integral

$$X(t)Y(t) - X(s)Y(s) =$$

$$\int_s^t X(u)dY(u) + \int_s^t Y(u)dX(u) + \int_s^t d[X,Y](u)$$

Esta puede interpretarse como la fórmula de ***integración por partes :***

$$\int_s^t X(u)dY(u) = X(u)Y(u)\Big|_s^t - \int_s^t Y(u)dX(u)$$

$$- \int_s^t d[X,Y](u)$$

Consideremos el caso $X(t) = W(t),\ Y(t) = t$ *. Aquí* $d[X,Y](u) \equiv 0$ *. Obtenemos*

$$\int_0^t W(u)du = t\,W(t) - \int_0^t u\,dW(u)$$

Esta sencilla integral es muy útil. Mediante ella probaremos que $W(t)^3 - 3tW(t)$ ***es martingala****.*

Apliquemos la primera versión del lema de Itô a la función $f(x) = x^3$*. Tenemos que*

$$W(t)^3 = f\big(W(t)\big) = 3\int_0^t W(u)^2\,dW(u) + 3\int_0^t W(u)\,du$$

$$= 3\int_0^t W(u)^2\,dW(u) + 3[t\,W(t) - \int_0^t u\,dW(u)]$$

de donde

$$W(t)^3 - 3t\,W(t) = \int_0^t [3W(u)^2 - u]dW(u)$$

y esta última es martingala por ser una integral estocástica.

Lema de Itô, el caso general. *Sean* $X_1(t), \dots, X_n(t)$ *procesos de Itô dados por*

$$dX_i(t) = \mu_i(t)dt + \sum_{k=1}^{m} \sigma_{ik}(t)dW_k(t)$$

donde los brownianos son independientes, i.e.,

$$W = (W_1, \dots, W_m)$$

es un browniano m – dimensional. Escribimos

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n); \quad \sigma = [\sigma_{ik}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m}}$$

Al primero se le llama ***vector de los coeficientes de deriva*** *('drift') y a la segunda,* ***matriz de los coeficientes de difusión****. Escribamos*

$$X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))$$

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW$$

Teorema (*Fórmula general de Itô*) ***:*** *bajo las condiciones anteriores, si* $f:[0,\infty)\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *es de clase* $C^{1,2}$, *entonces* $Y(t)=f(t,X(t))$ *tiene diferencial estocástica*

$$dY(t)=\frac{\partial f}{\partial t}\big(t,X(t)\big)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\big(t,X(t)\big)\,dX_i(t)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\big(t,X(t)\big)d[X_i,X_j](t)$$

ó bien,

$$\boxed{df\big(t,X(t)\big)=f_t dt+f_X dX+\frac{1}{2}f_{XX}\,d\langle X\rangle(t)}$$

donde $d\langle X\rangle(t)=\big[d[X_i,X_j](t)\big]_{i,j=1,\ldots,n}$

Ecuaciones diferenciales estocásticas.

Teorema de Picard (existencia y unicidad) : *si* $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *es continua y Lipschitz en la segunda variable, entonces el problema*

$$\dot{x}(t)=f\big(t,x(t)\big),\quad x(0)=x_0\in\mathbb{R}^n$$

tiene solución única ***local***.

Esbozo de demostración: *se considera el mapeo* $T:X\to X$ *definido por*

$$(Tx)(t)=x_0+\int_0^t f\big(s,x(s)\big)ds$$

en un espacio de funciones adecuado X. Se prueba que T es una contracción y por el principio de contracciones o Teorema de punto fijo de Banach, se concluye.

El caso estocástico *puede verse como el anterior con perturbaciones aleatorias*

$$\dot{X}(t)=f\big(t,X(t)\big)+g(t,X(t))\xi(t).$$

Aquí $\xi(t)$ *representa un* **ruido blanco.** *En forma diferencial*

$$dX(t)=f\big(t,X(t)\big)dt+g\big(t,X(t)\big)dW(t)$$

e integral

$$X(t)=X_0+\int_0^t f\big(s,X(s)\big)ds+\int_0^t g\big(s,X(s)\big)dW(s)$$

donde X_0 *es una v.a. y W un browniano m – dimensional.*

Def : *Sea* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\,\in\,[0,T]}, P)$ *un espacio de probabilidad filtrado por el browniano W. Una solución* ***fuerte*** *a la EDE es un proceso* $x(t) \in \mathbb{R}^n$, *definido para* $t \in [0,T]$ *que satisface lo siguiente :*

i) *es adaptado a la filtración browniana;*

ii) *las dos integrales están bien definidas;*

iii) *la igualdad se satisface c.s.* $\forall t \in [0,T]$.

Observación muy importante : *la solución es* ***global,*** *no sólo local como en Picard.*

Observación : *se tiene el concepto de solución* ***débil,*** *que a grandes rasgos significa que se tienen dados los coeficientes, como funciones determinísticas en* $[0,T] \times \mathbb{R}^n$, *y se encuentran un espacio de probabilidad y un browniano ad hoc en los que la solución tiene sentido. Ver Steele (2001).*

Teorema (Itô, 1952) : *Sea* X_0 *una v.a. en* $\mathbb{R}^n$ *independiente de la* σ*- álgebra generada por un browniano m – dimensional W y tal que* $E[|X_0|^2] < \infty$. *Supongamos* $f: [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g: [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times m}$ *son medibles y satisfacen*

$$|f(t,x)| + \|g(t,x)\| \leq C(1 + |x|)$$

$$|f(t,x) - f(t,y)| + \|g(t,x) - g(t,y)\| \leq D|x - y|$$

para ciertas constantes C, D > 0; $t \in [0,T]$; $x, y \in \mathbb{R}^n$.
Entonces, la EDE

$$dX(t) = f\big(t, X(t)\big)dt + g\big(t, X(t)\big)dW(t); \quad X(0) = X_0$$

tiene una única solución (fuerte) en $[0,T]$, *adaptada y tal que*

$$E\left[\int_0^T |X(t)|^2 \, dt\right] < \infty.$$

ATENCION : revisar el enunciado de este teorema en Mikosch, hay un error allí.

Ejemplo 1: *La condición de crecimiento lineal es necesaria para evitar explosiones, p ej* $X'(t) = X(t)^2$, $X(0) = 1$ *tiene solución única* $X(t) = (1-t)^{-1}$ *en* $0 \leq t < 1$ *y no puede extenderse.*

Ejemplo 2 : $X'(t) = 3X(t)^{2/3}$, $X(0) = 0$ *tiene dos soluciones :* $X_1(t) = t^3$, *para* $t > 0$, $X_1(t) = 0$, *para* $t \leq 0$. *Y por otra parte* $X_2(t) \equiv 0$.

Ejemplo 3 : MBG. $dX(t) = \mu\, X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$.

Busquemos una solución $X(t) > 0$. *Sea* $Z(t) = logX(t)$.

(¿Por qué puedo suponer esto?)

Entonces, por el lema de Itô,

$$dZ(t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\, dW(t); \quad Z(0) = logX_0$$

$$Z(t) = logX_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\, W(t)$$

luego,

$$X(t) = expZ(t) = X_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\, W(t)}$$

Ejemplo 4 : Ornstein-Uhlenbeck.

$$dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma dW(t)$$

Sea $Y(t) = e^{-\alpha t}X(t)$, $Y_0 = X_0$. *Por el lema de Itô*

$$dY(t) = \sigma e^{-\alpha t} dW(t)$$

Luego,

$$Y(t) = X_0 + \sigma \int_0^t e^{-\alpha s} dW(s)$$

$$X(t) = e^{\alpha t} X_0 + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(s-t)} dW(s)$$

Pregunta : *¿se puede resolver explícitamente la integral estocástica?*

EDE lineales (EDEL). (Arnold, 1974).

$$dX(t) = \big(A(t)X(t) + a(t)\big)dt +$$

$$\sum_{i=1}^{m} (B_i(t)X(t) + b_i(t))dW_i(t)$$

A; $B_1, \dots, B_m$ *son* $n \times n$*; a;* $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^n$*;* W *es m – dimensional.*

Def . : Homogénea sii *a;* $b_1, \dots, b_m = 0$.

Lineal en sentido restringido : sii $B_1, \dots, B_m = 0$.

Más aún, las EDEL en sentido restringido admiten solución explícita usando matrices fundamentales, como en el caso determinístico.

TEU : *hay solución única bajo la hipótesis de que*

$$A;\, B_1, \dots, B_m;\, a;\, b_1, \dots, b_m$$

son medibles y acotadas en $[0,T]$. *Si lo anterior se cumple para todo* $T > 0$, *entonces hay solución en todo* $[0,\infty)$.

El caso autónomo : *A es constante, la matriz fundamental es* $\Phi(t) = e^{At} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$, *y la solución a*

$$dX(t) = \big(AX(t) + a(t)\big)dt + B(t)dW(t)$$

es

$$X(t) = e^{At}X_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}a(s)ds + \int_0^t e^{A(t-s)}B(s)dW(s)$$

Ejercicio : *verificarlo con la fórmula de Itô.*

Problema abierto : *¿Bajo qué condiciones se pueden obtener soluciones explícitas en el caso* ***no restringido****?*

Apéndice (opcional) :   Representación de Feynman – Kac.

Notación. *Dada una EDE en* $\mathbb{R}^n$

$$dX(t) = \mu\big(t, X(t)\big)dt + \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t)$$

definimos

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_X = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} (\sigma\sigma^t)_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

se le llama : ***generador infinitesimal, operador infinitesimal asociado, operador de Dynkin, operador de Itô, operador 'backward' de Kolmogorov.***

Observación : $Dom(\mathcal{A}) \supset C^2(\mathbb{R}^n)$.

Ejemplo: *para la EDE del MBG,* $dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t)$

$$\mathcal{A}_X = \mu\, x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\sigma^2}{2} x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Ejercicio : *escribir el generador para el sistema SMK.*

Proposición: *Si* $X(t)$ *satisface la EDE de arriba, y* $F \in C^2([0,\infty) \times \mathbb{R}^n;\ \mathbb{R}^n)$*, entonces* $Y(t) = F(t, X(t))$ *satisface la EDE*

$$dY(t) = (F_t\big(t, X(t)\big) + \mathcal{A}F\big(t, X(t)\big))dt$$

$$+ \Big(F_X\big(t, X(t)\big)\Big)\, \sigma\big(t, X(t)\big)dW(t)$$

Dem.: lema de Itô.

Teorema de representación de Feynman – Kac, 1:
Supongamos que se cumple los siguiente.

a) $F(t, x)$ *es solución de*

$$F_t + \mu F_X + \frac{\sigma^2}{2} F_{XX} = 0\ ;\quad 0 \le t \le T;\ \ x \in \mathbb{R};$$

$$F(T,x) = \Phi(x)$$

donde $\Phi(x)$*es continua* , $\mu(t,x), \sigma(t,x)$ *satisfacen las condiciones del TEU de EDE;*

b) el proceso $X(t)$ *está definido por*

$$dX(s) = \mu\big(s, X(s)\big)ds + \sigma\big(s, X(s)\big)dW(s)$$

para $0 \leq s \leq t \leq T$, *y se cumple* $X(t) = x$;

c) el proceso $G(s) = \sigma(s, X(s))F_X(s, X(s))$ *es adaptado y cumple*

$$\int_0^T E[G(s)^2]ds < \infty$$

entonces, *para* $0 \leq t \leq T$; $x \in \mathbb{R}$*se satisface la representación*

$$F(t,x) = E\big[\Phi\big(X(T)\big)\big|X(t) = x\big] = E^{t,x}[\Phi\big(X(T)\big)].$$

Prueba: *La EDP correspondiente es*

$$F_t + \mathcal{A}F = 0$$

Apliquemos el lema de Itô a $F(s, X(s))$:

$$F\big(T, X(T)\big) - F\big(t, X(t)\big) = \int_t^T (F_t + \mathcal{A}F)(s)ds$$

$$+ \int_t^T \sigma(s, X(s))F_X(s, X(s))dW(s),$$

la integral de Lebesgue tiene integrando nulo. Tomamos $E^{t,x}$ *y la int. Estocástica se anula. Luego,*

$$E^{t,x}\big[F\big(T, X(T)\big)\big] - E^{t,x}\big[F\big(t, X(t)\big)\big] = 0,$$

pero $E^{t,x}\big[F\big(t, X(t)\big)\big] = F(t,x)$, *y*

$$E^{t,x}\big[F\big(T, X(T)\big)\big] = E^{t,x}\big[\Phi\big(X(T)\big)\big].$$

Ejemplo : *Si* $F_t + \frac{\sigma^2}{2} F_{XX} = 0$ *con* $\sigma = cte.$ *y*
$F(T, x) = x^2$, *entonces* $dX(s) = \sigma\, dW(s)$; *y*
$X(t) = x$, *cuya solución es*

$$X(T) = x + \sigma(W(T) - W(t)) \sim N(x, \sigma\sqrt{T - t}),$$

y

$$F(t, x) = E^{t,x}[X(T)^2] = \sigma^2(T - t) + x^2$$

Sábado 4.

A. Dinámica de mercados financieros. El modelo de Samuelson, Merton & Karatzas (SMK).

B. El modelo original de Black Scholes.

A. *Consideremos un mercado con n activos cuyos precios están modelados por MBG generalizados. Esto es, sus procesos de precios* $S_1(t), \dots, S_n(t)$ *están gobernados por el sistema de EDE*

$$dS_1(t) = S_1(t)[\mu_1(t)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{1j}(t)dW_j(t)]$$

$$\vdots$$

$$dS_n(t) = S_n(t)[\mu_n(t)dt + \sum_{j=1}^{m} \sigma_{nj}(t)dW_j(t)]$$

Aquí, n = número de activos ~ "tamaño del mercado"; y

m = número de "fuentes de incertidumbre"

Comentario : *es un modelo muy general. Si se quiere que los precios sean estrictamente positivos y los procesos que los representan sean semi – martingalas, entonces necesariamente tienen la forma de arriba (ver Shreve (2004), vol II).*

Comentario : *el modelo de Bachelier para el proceso de precios :*

$$S(t) = b + \tilde{\sigma}\, W(t)$$

Comentario : otros modelos (a tiempo discreto, procesos de Levy, MBf, rezagos y adelantos).

Metateorema de Björk : *el mercado SMK es, genéricamente*

(i) ***sin arbitraje*** $\Leftrightarrow\ m \geq n$

(ii) ***completo*** $\Leftrightarrow\ n \geq m$

(iii) ***completo y sin arbitraje*** $\Leftrightarrow\ n = m$

Fijemos de ahora en adelante, una 'base estocástica' o 'espacio de probabilidad filtrado'

$$(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\,\in\,[0,T]}, P)$$

donde $\mathcal{F}_t$ *representa el acervo informacional hasta el instante t. Usualmente la filtración es la generada por un MB de dimensión m.*

Hipótesis técnicas del modelo SMK

Los coeficientes son progresivamente medibles y satisfacen :

$$\int_0^T [|\mu(t)| + \|\sigma(t)\|^2]dt < \infty \qquad (*)$$

donde

$$\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n); \quad \sigma = [\sigma_{ik}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,m}}$$

Ver Tudor (1997) o Karatzas (1997).

Definición : *un <u>portafolio</u> es un proceso adaptado* $q: [0,T] \to \mathbb{R}^n$ *cuyas componentes son las cantidades de activos* $A_1, \dots, A_n$ *del mercado en consideración.*

Comentario : *para consideraciones técnicas más precisas, ver Karatzas (1997), ó Karatzas & Shreve (1998).*

Definición : El valor del portafolio es

$$(Vq)(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t) S_i(t) = \langle q(t), S(t) \rangle$$

Ejemplos.

1) *Portafolios de inversión : 20 entradas con digamos, oro, divisas, treasuries, CETES, acciones Apple, acciones Telmex, etc. Los de bancos centrales pueden tener varias decenas de componentes.*

2) *Black Scholes :* $q(t) = (a(t), b(t))$ *donde* $a(t)$ *es la cantidad de activo riesgoso y* $b(t)$ *la cantidad de bono o activo no riesgoso. Tenemos*

$$(Vq)(t) = a(t)S(t) + b(t)B(t)$$

donde $S(t)$ *es un MBG, y* $dB(t) = rB(t)dt$, *con r la tasa libre de riesgo (CETES o 'Treasury bills').*

Hipótesis de riqueza positiva : para cada $t \in [0,T]$

$$(Vq)(t) \geq 0, \quad c.s.$$

Comentario : *Ventas al descubierto ó en corto ('short sales').*

Definición : *un portafolio es admisible o auto-financiable sii*

$$d(Vq)(t) = \sum_{i=1}^{n} q_i(t) dS_i(t) = \langle q(t), dS(t) \rangle, \text{ i.e.}$$

$$\sum_{i=1}^{n} S_i(t) dq_i(t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} d[S_i, q_j](t) = 0$$

Comentario : *interpretación.*

Definición : Un portafolio de arbitraje *es un portafolio $q(t)$ que satisface lo siguiente : existe $\tau \in (0, T]$ tal que*

(i) $P[(Vq)(0) = 0] = 1$

(ii) $P[(Vq)(\tau) \geq 0] = 1$

(iii) $P[(Vq)(\tau) > 0] > 0$

Si en lugar de (iii) se cumple

*(iii)** $P[(Vq)(\tau) > 0] = 1$

a ese portafolio se le llama ***arbitraje fuerte.***

Comentario : *varias definiciones de arbitraje (NFLVR).*
En estas notas sólo utilizaremos la definición de arriba.

Definición : *un mercado es* ***viable*** *o libre de arbitraje sii no existen portafolios de arbitraje. Lo denotamos como NA.*

Definición : una medida martingala equivalente (MME) *es una medida de probabilidad* Q *en* $(\Omega, \mathcal{F})$ *tal que* $Q \sim P$, *y el proceso de precios descontado resulta ser una* $Q -$ *martingala, i.e.,*

$$E^{Q}\left[e^{-r(T-t)}S(t)\middle|\mathcal{F}_u\right] = S(u), \quad c.s. \;\; (u \leq t)$$

Comentario : *factores de descuento generalizados.*

Definición : *el mercado es* **completo** *si y sólo si para cualquier función borel medible* Φ *en* $\mathbb{R}^n$, *existe un* <u>*portafolio replicante*</u>, *i.e., un portafolio auto-financiable q tal que*

$$\Phi\big(S(T)\big) = (Vq)(T)$$

Ejemplo 1: *para el modelo binomial a un período se cumple:*

$$NA \iff completez \iff d < (1+r) < u$$

$$\textit{No Arbitraje fuerte} \iff d \leq (1+r) \leq u$$

Ejemplo 2 : *el mercado BS* (activo, bono) *es completo.*

Demostración : *esbozo en Björk (2005), pp; caso general y demostración rigurosa en Karatzas (1997) y Williams (2006). En estas últimas referencias se encuentra la prueba del siguiente :*

Criterio de Karatzas & Shreve : *el mercado SMK, bajo la hipótesis* (*) *es completo si y sólo si* $n = m$, *y*

$$\sigma(t) \;\; \textit{es invertible c.s.} \;\; \forall t \in [0, T]$$

Teoremas auxiliares importantes en finanzas matemáticas y aplicaciones al modelo de Black Scholes.

El Teorema de Girsanov, dimensión uno. *Sea* $W(t)$ *un browniano en un espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$, *y* $\Theta(t)$ *un proceso adaptado. Defínase*

$$Z(t) = exp\left\{-\int_0^t \Theta(s)\, dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \Theta(s)^2\, ds\right\}$$

y supongamos que se cumple

$$E\left[\int_0^T \Theta(s)^2\, Z(s)^2 ds\right] < \infty.$$

Definimos $Z = Z(T)$ *y*

$$Q(A) = \int_A ZdP \qquad (A \in \mathcal{F})$$

$$W^Q(t) = W(t) + \int_0^t \Theta(u)du.$$

Entonces, $E[Z] = 1$ *;* Q *es una medida de probabilidad en* $(\Omega, \mathcal{F})$ ***equivalente a*** P, *y* $W^Q(t)$ *es un movimiento browniano con respecto a* Q.

Ver demostración en Oksendal (2005).

Comentario : *Teoría de Cameron – Martin – Girsanov.*

Aplicación al mercado de Black Scholes :

$$dB(t) = rB(t)dt\, ;$$

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t).$$

Ejercicio : *Si* $f(t)$ *es determinística y* C^1, *y el proceso* $X(t)$ *tiene diferencial estocástica* $dX(t)$, *entonces*

$$d\big(f(t)X(t)\big) = X(t)f'(t)dt + f(t)dX(t)$$

Aplicando lo anterior,

$$d\big(e^{-rt}S(t)\big) = -re^{-rt}S(t)dt + e^{-rt}dS(t)$$

$$= (\mu - r)e^{-rt}S(t)dt + \sigma e^{-rt}S(t)dW(t)$$

$$= \sigma e^{-rt}S(t)\left[\frac{\mu-r}{\sigma}\ dt + dW(t)\right].$$

Def: *el precio del dividendo es* $\Theta(t) \equiv \frac{\mu-r}{\sigma}$.

Ahora aplicamos el T. De Girsanov, cuyas hipótesis se cumplen obviamente para $\Theta(t)$. *Entonces* $Q \sim P$,

$$W^Q(t) = \frac{\mu-r}{\sigma}t + W(t),$$

es un movimiento browniano c.r a Q. *Tenemos*

$$dW^Q(t) = \frac{\mu-r}{\sigma}dt + dW(t),$$

entonces

$$d\big(e^{-rt}S(t)\big) = \sigma e^{-rt}S(t)dW^Q(t),$$

$$e^{-rt}S(t) = S(0) + \int_0^t \sigma e^{-ru}S(u)dW^Q(u).$$

Así, el proceso de precios descontado es una Q - martingala. Además, con respecto a Q,

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

$$= \mu S(t)dt + \sigma S(t)[-\frac{\mu-r}{\sigma}dt + dW^Q(t)],$$

i.e., el "milagro de BS" ocurre :

$$dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dW^Q(t),$$

en vez de que la dinámica del precio dependa del retorno que representa al activo riesgoso, es decir μ, con respecto a al nueva medida Q, depende del coefiente que representa al activo no riesgoso, i.e., la tasa libre de riesgo r.

Teorema de Representación de Martingalas. *Sea* $W(t)$ *un browniano en un espacio de probabilidad filtrado* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}, P)$. *Entonces, dada una una* $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in[0,T]}$ *- martingala* $M(t)$, *existe un proceso adaptado* $\Gamma(t)$ *en* $[0, T]$ *tal que*

$$M(t) = M(0) + \int_0^t \Gamma(s)\, dW(s).$$

Ver demostración en Oksendal (2005).

Comentario : *Teoremas de representación. Breve comentario histórico de este teorema.*

Aplicación a BS.

Sea φ_T *una v.a.* $\mathcal{F}_T$ *– medible. Por ejemplo,* $\varphi_T = (S(T) - K)^+$, *el perfil de pago para una opción de compra europea. Considérese la función de valuación*

$$\phi(t) = E^Q\left[e^{-r(T-t)}\varphi_T \middle| \mathcal{F}_t\right],$$

y sea $M(t) = e^{-rt}\phi(t)$. ***Entonces*** $M(t)$ *es Q- martingala, pues si* $0 \leq s \leq t \leq T$,

$$E^{Q}[M(t)|\mathcal{F}_s] = E^{Q}[E^{Q}[e^{-rT}\varphi_T|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s]$$

$$= E^{Q}[e^{-rT}\varphi_T|\mathcal{F}_s] = M(s).$$

Sobre el modelo y la fórmula de Black Scholes

A. *Esta fórmula fue establecida por Fisher Black y Myron Scholes (Black & Scholes, 1973), en colaboración parcial con Robert C. Merton. A los tres se les considera como los iniciadores de las finanzas matemáticas en su época reciente. Black murió en 1995. A Merton y Scholes se les otorgó el premio nóbel de economía 1997, por sus contribuciones relacionadas con la derivación y uso de la fórmula.*

La fórmula responde a una pregunta milenaria : ¿cómo debe valuarse una opción de compra? Este intrumento financiero se ha comercializado desde hace mucho en diversos mercados. Aparecen referencias a las opciones (y/o instrumentos muy similares) en el código de Hammurabi y en el antiguo testamento. Sin embargo el mercadeo de las mismas se hacía sin una "base racional" hasta 1973, pues nadie conocía una fórmula universalmente aceptada para calcular el precio de las opciones.

A partir de la introducción de la fórmula de BS y de la apertura y ampliaciones de los mercados de opciones (especialmente el CBOE, fundado el mismo año de 1973), la consideración de diversos aspectos relacionados con los derivados financieros (no sólo opciones sino también futuros, swaps, quantos, y una verdadera jungla de diversas opciones 'exóticas') ha jugado un papel de primera importancia en los mercados financieros, y el papel central en finanzas matemáticas. Esta activa área matemática, muy desarrollada a lo largo de los últimos cuarenta años, tiene como referencia principal, como 'benchmark' al modelo y la fórmula de BS. Casi todos los desarrollos posteriores son perfeccionamientos, generalizaciones o críticas a ellos. De manera que el modelo de BS es el modelo matemático más *importante de las finanzas, y uno de los más importantes de la economía y las matemáticas aplicadas.*

Un dato curioso : la fórmula de BS es el único resultado conocido de matemáticas aplicadas que tiene una cantidad considerable de demostraciones diferentes (alrededor de 10). Algunos autores consideran que es la fórmula más usada de la historia, pues se ha utilizado, a lo largo de 40 años, en millones y millones de operaciones financieras, ya sea directa o indirectamente o al menos como referencia parcial.

B. Opciones financieras. *Una opción de compra europea ('european call') es un contrato entre dos partes, A (quien vende o escribe la opción) y B (quien compra la opción), tal que le da a B el derecho, pero no la obligación, de comprarle a A un cierto activo ('asset'), por una cierta cantidad de dinero prefijada (que se denomina precio de ejercicio, en inglés 'exercise price' o 'strike') y en una fecha determinada (tiempo de maduración o vencimiento, en inglés 'maturity').*

Denotemos al tiempo presente por $t = 0$, *al precio actual del activo (o activo subyacente) por s, al precio de ejercicio por K, y a la fecha de vencimiento por T. De manera que la opción vive en el intervalo* $[0, T)$ *y madura en el tiempo T. El precio de la opción se denota por* $c = c(t)$, *para* $0 \leq t \leq T$. *Como veremos enseguida,* $c(T)$ *es conocido, y el problema es encontrar* $c(0)$, *y más en general* $c(t)$ *para cualquier t.*

Ejemplo. Una opción de compra europea escrita sobre acciones de Telmex. Da al comprador el derecho de adquirir un paquete de 100 acciones por 20,000 pesos en julio de 2014. Aquí, $s = 150 \times 100 = 15{,}000$, *mientras que* $K = 20{,}000$, *y* $T = 6$ *meses. La tasa libre de riesgo puede tomarse como la tasa de los CETES,* $r = 4.1\%$. *El valor histórico de la volatilidad de las acciones principales de Telmex es* $\sigma = 12\%$.

S(0) = 15,000 ;   K = 20,000;   T = 6 meses

A	***B***
Escribe, vende la opción	***Compra la opción***

Tiene la obligación de vender $S(T)$ en T por K \$ si B ejerce

Tiene el derecho, pero no la obligación, de comprar $S(T)$ en T por \$ K

Recibe la prima $c(0)$ por el riesgo que corre.

Paga la prima $c(0)$

El problema :

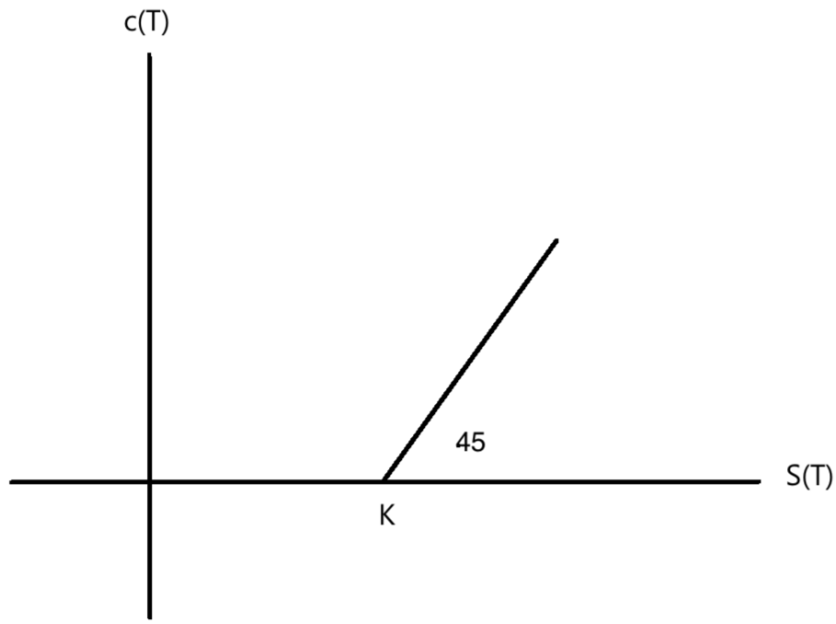
$$¿¿\, c(0) = ??$$

Más en general, ¿cuánto vale $c(t)$, $t < T$?

El perfil de pago *('pay-off')* ***de una opción de compra europea está dado por***

$$c(T) = (S(T) - K)^{+} = max\{S(T) - K, 0\},$$

donde $S(T)$ *es el precio que tendrá el subyacente cuando* $t = T$.



De manera que al comprador de la opción (B) le conviene ejercer la opción si $S(T) > K$, *pues en ese caso compra el subyacente por K, lo vende en el mercado por* $S(T)$, *y se gana la diferencia* $S(T) - K$. *En caso de que* $S(T) < K$, *entonces el comprador (B) no ejerce la opción.*

Obviamente este contrato es asimétrico en cuanto al riesgo. A puede ganar una cantidad no acotada de antemano y B puede perder la misma cantidad. Por ello, para que el contrato sea justo, B tiene que pagar una cierta cantidad por la opción, que se llama precio o prima, y es lo que hemos denotado con $c(0)$. *De manera que el perfil de pago de la opción, desde el punto de vista de B, es el de la figura de arriba, pero desplazada verticalmente hacia abajo en* $c(0)$ *unidades.*

C. El modelo de Black Scholes. *El objetivo es valuar la opción, es decir encontrar un valor "justo" para* $c(0)$. *Se asumen las siguientes hipótesis :*

1) *El precio del subyacente* $s(t)$ *evoluciona de acuerdo a la dinámica estocástica de un MBG :*

$$dS(t) = \mu\, S(t)dt + \sigma\, S(t)dW(t)$$

En particular el rendimiento y la volatilidad del subyacente son constantes conocidas.

2) *El mercado BS consta del subyacente (mercado de capitales) y del mercado de dinero representado por un bono cuya dinámica*

$$dB(t) = rB(t)dt$$

donde r *es la tasa libre de riesgo o neutral al riesgo, y* $r < \mu$*.*

3) *El subyacente y el bono se pueden mercadear continua y divisiblemente, es decir, en cualquier instante del intervalo* $0 \le t \le T$ *y en cualesquiera cantidades reales.*

4) *El subyacente no paga dividendos.*

5) *La tasa de interés libre de riesgo es conocida y fija.*

6) *No hay costos de transacción ni impuestos.*

7) *En el mercado BS* ***no hay arbitraje.***

Con base en estas hipótesis y utilizando un poco de cálculo estocástico, incluidas la aplicación de los Teoremas de Girsanov y de representación de martingalas, se deduce la fórmula de BS, mediante el 'método de la martingala'. Lo haremos un poco después.
Sin embargo, la primera prueba de la fórmula, la que aparece en el artículo B&S de 1973 utiliza un enfoque diferente : mediante la hipótesis de no

arbitraje y la fórmula de Itô se deduce una EDP que debe ser satisfecha por la función $C(t,s)$*, es decir, el precio o prima de la opción como función del tiempo y del valor actual del subyacente, i.e.,* $s = S(t)$*. La EDP de BS es*

$$\frac{\partial C}{\partial t} + rs\frac{\partial C}{\partial s} + \frac{\sigma^2}{2}s^2\frac{\partial^2 C}{\partial s^2} - r\,C = 0;$$

$$C\big(T,S(T)\big) = (S(T) - K)^+$$

La solución de esta EDP con la condición de frontera es precisamente la fórmula de BS que deduciremos más adelante, por un método completamente diferente, el 'método de la martingala'.

Comentario sobre las hipótesis. *Como en cualquier modelo, las hipótesis siempre tienen ventajas y desventajas, y en caso de que haya razones para ello, pueden ser sustituidas por otras más apropiadas (de acuerdo a ciertos criterios) y desarrollar el modelo correspondiente a las nuevas hipótesis.*
En el caso del modelo BS, todas las hipótesis pueden mejorarse, pero ninguna ha sido tan criticada como la primera. Se han hecho grandes esfuerzos por sustituir la hipótesis de que el precio del subyacente sigue un MBG.
Se han considerado coeficientes (μ,σ) *determinísticos pero variantes con el tiempo, ó estocásticos, e incluso se han introducido otros procesos realmente diferentes para modelar el precio, como el modelo hiperbólico de Levy.*

Con tales extensiones del modelo se han obtenido avances importantes, tanto teóricos como en lo que respecta al principio de verificación científica, es decir, el cotejar los resultados del modelo con los datos de los mercados (algo completamente ignorado en la mayor parte de la teoría económica). Sin embargo, en no pocas ocasiones el modelo original de BS arroja resultados similares en calidad y cantidad a los de modelos más sofisticados y es mucho más fácil de utilizar.

En resumen, el modelo de BS se ha convertido en un 'benchmark', en la referencia central de toda la subárea de derivados financieros.

Consideraciones generales sobre la fórmula y su impacto global pueden encontrarse en Stewart (2012).

Domingo 5.

A. La fórmula de Black Scholes.

B. Los dos Teoremas Fundamentales de Finanzas (o de Valuación de activos).

A. En lo que sigue completaremos la valuación de una opción de compra europea. El método utilizado (método de la martingala) tiene aplicaciones y alcances que van mucho más allá de este caso particular.

El portafolio BS : $q(t) = (a(t), b(t))$ *donde la primera entrada corresponde a unidades del activo riesgoso, el cual sigue un MBG*

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t); \quad S(0) = S_0$$

y la segunda entrada son unidades del activo no riesgoso, un bono gobernado por

$$dB(t) = rB(t)dt; \;\; B(0) = 1$$

El valor del portafolio es

$$V(t) = (Vq)(t) = a(t)S(t) + b(t)B(t)$$

$$= a(t)S(t) + b(t)e^{rt}.$$

Definimos el valor descontado del portafolio como

$$V_D(t) = e^{-rt}V(t) = e^{-rt}a(t)S(t) + b(t)$$

Suponemos que el portafolio es auto-financiable :

$$dV(t) = a(t)dS(t) + re^{rt}b(t)dt.$$

Como

$$dV_D(t) = -re^{-rt}V(t) + e^{-rt}dV(t)$$

se obtiene

$$dV_D(t) = e^{-rt}a(t)[dS(t) - rS(t)dt]$$

$$= \sigma e^{-rt}a(t)S(t)dW^Q(t)$$

o sea

$$V_D(t) = V_D(0) + \int_0^t \sigma e^{-ru}a(u)S(u)dW^Q(u).$$

Entonces, el proceso del valor del portafolio descontado es una $Q-$ *martingala. Luego, para* $t \leq T$,

$$e^{-rt}V(t) = E^Q[e^{-rT}V(T)|\mathcal{F}_t]$$

de donde obtenemos la importante fórmula general de valuación para portafolios en este mercado BS :

$$\boxed{V(t) = E^Q[e^{-r(T-t)}V(T)\big|\mathcal{F}_t]}$$

Vamos a juntar ahora todas las piezas para valuar una ***opción europea de compra****,* ***escrita sobre un activo subyacente*** $S(t)$ ***gobernado por el MBG con parámetros*** μ, σ. *El precio, prima o costo de la opción al tiempo* t*, con* $S(t) = s$ *lo denotaremos por* $C(t, s) = C(t, S(t))$.

El valor terminal o de maduración de la opción es

$$C\big(T, S(T)\big) = (S(T) - K)^+.$$

Decimos que el portafolio $q(t) = (a(t), b(t))$ ***replica la opción sii***

$$V(T) = (Vq)(T) = C\big(T, S(T)\big) = (S(T) - K)^+.$$

Vimos que por el TRM, si $\varphi_T = (S(T) - K)^+$*, se tiene*

$$E^Q[e^{-rT}(S(T) - K)^+ | \mathcal{F}_t] = M(t)$$

$$= M(0) + \int_0^t \Gamma(s)\, dW^Q(s)$$

por otra parte

$$V_D(t) = V_D(0) + \int_0^t \sigma e^{-ru} a(u) S(u) dW^Q(u)$$

De manera que el portafolio replicará a la opción ***y de hecho para todo*** $t \in [0, T]$ *sii* $V(t) \equiv C(t, S(t))$ *y esto último se cumple pues* $V_D(0) = M(0)$*, y si igualamos los dos integrandos en las integrales de arriba :*

$$\Gamma(u) \equiv \sigma e^{-ru} a(u) S(u),$$

o bien

$$a(t) = \frac{e^{rt}\Gamma(t)}{\sigma\, S(t)}, \quad 0 \le t \le T.$$

Bajo estas circunstancias obtenemos que

$$C(t) = e^{-r(T-t)} E^Q[(S(T) - K)^+ | \mathcal{F}_t] \quad (*)$$

Comentario : *obsérvese que setamos obteniendo el 'peso' del portafolio correspondiente al activo. Se puede obtener el peso correspondiente al bono usando el lema de Itô.*

Ejercicio : *obtener el otro peso.*

Comentario : abusos de notación :

$$C(t) = C(t,s) = C\big(t,S(t)\big) = C(t,r,K,s,\sigma) \quad etc.$$

Resta evaluar esta esperanza condicional en (*)*. Para ello se necesita sólo un poco de teoría de probabilidad y calcular algunas integrales complicadas, las cuales todas se reducen a utilizar la integral de Louiville :*

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$$

[*Prueba :*

$$I = \sqrt{I^2} = \sqrt{(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx)(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy)}$$

$$= \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy}$$

$$= \sqrt{\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}\, rdrd\theta} \;=\; \sqrt{\pi} \;\;].$$

Para los detalles, ver el apéndice de abajo. El resultado final es

$$\boxed{C(t) = sN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)}$$

la muy célebre fórmula de Black Scholes, alias "la fórmula más usada en la historia".

En Stewart (2012), en el último capítulo, vienen consideraciones interesantes acerca de la fórmula y del uso de la matemática en finanzas en general.

Comentario : *la herramienta para esta prueba, conocida como 'método de la martingala' empezó a gestarse en el período 1979 – 1981 en los trabajos seminales de Harrison, Kreps & Pliska (ver Harrison & Kreps (1979); Harrison & Pliska (1981)).*

(*) Apéndice : cálculo detallado de la esperanza condicional.

Seguiremos muy de cerca Shreve (2004) vol. II. Tenemos que

$$C(t,s) = e^{-r(T-t)} E^Q[(S(T)-K)^+ | \mathcal{F}_t]$$

para $t \in [0,T]$, *y* $S(t) = s$. *Entonces,*

$$S(t) = S(0)\, exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W^Q(t)\right],$$

de donde

$$S(T) = S(0)\, exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W^Q(T)\right]$$

$$= S(t)\exp\{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$$

$$+\, \sigma(W^Q(T) - W^Q(t)y$$

Luego,

$$S(T) = S(t)\, exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\, Y\right],$$

con $\tau = T - t$, *y donde*

$$Y = -(W^Q(T) - W^Q(t))/\sqrt{\tau} \sim N(0,1).$$

Entonces, para cualquier $t \in [0, T]$, *la v.a.* $S(T)$ *es el producto de la variable aleatoria* $S(t)$, *la cual es* $\mathcal{F}_t$ *- medible, con la v.a.* $\xi = exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\,Y\right]$, *la cual es independiente de* $\mathcal{F}_t$, *pues* $(W^Q(T) - W^Q(t))$ *es independiente de* $W^Q(t)$.

Por lo anterior, la esperanza condicionada a $\mathcal{F}_t$ *es una esperanza usual con respecto a Q :*

$$C(t, s) = e^{-r\tau}\, E^Q[(S(t)\xi - K)^+].$$

Lema *(Th. 1.5.1, Shreve (2004) vol II) : Sea Y una v.a. en* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *con fdp continua* $f(y)$, *y* $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua y no negativa. Entonces*

$$E[g(Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(y) dy$$

Aplicamos esto a la v.a. Y, *para la cual*

$$f(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

Luego $C(t) =$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\tau}\,(S(t)\xi - K)^+ \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-r\tau} \left(s\, exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\,Y\right] - K\right)^+ \cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy$$

El integrando es diferente de cero (positivo) sii

$$y < d_2 = \left(\log\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)/\sqrt{\tau}$$

por lo que $C(t) =$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{d_2} e^{-r\tau}\left(s\ exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau - \sigma\sqrt{\tau}\, Y\right] - K\right)\cdot$$

$$\cdot \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{d_2} s\ exp\left[-(y^2/2) - \frac{\sigma^2}{2}\tau - \sigma\sqrt{\tau}\, Y\right]\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$-\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{d_2} e^{-r\tau}\, K\ exp[-(y^2/2)]\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

$$= \left(\frac{S}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{d_2} exp\left[-(\frac{1}{2})(y + \sigma\sqrt{\tau})^2\right]dy \quad - \quad Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

y haciendo $u = y + \sigma\sqrt{\tau},\ du = dy$ *en la integral :*

$$C(t) = \left(\frac{S}{\sqrt{2\pi}}\right)\int_{-\infty}^{d_2+\sigma\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)du \quad - \quad Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

aquí

$$N(u) = (\frac{1}{\sqrt{2\pi}})\int_{-\infty}^{u} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt.$$

Escribiendo $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{\tau} =$

$$\left(\log\left(\frac{s}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)\right)/\sqrt{\tau},$$

obtenemos finalmente

$$\boxed{C(t) = s\,N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)}$$

APENDICE : COMPLEMENTOS SOBRE BS

La fórmula de BS, *dada por*

$$f(r, K, \tau, s, \sigma) = sN(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2)$$

es una función

$$f\colon \mathbb{R}^5_{++} \to \mathbb{R}_{++},$$

donde $\mathbb{R}_{++} = \{x \in \mathbb{R}: x > 0\}$. Resulta que f *es una función real – analítica* de cinco variables, definida en el *primer ortante de* $\mathbb{R}^5_{++}$.

UNIDADES. *Este es un tema que todos los economistas y la mayoría de los financieros ignoran olímpicamente. Sin embargo, en varios sentidos importantes es una de las bases de la ciencia e ingenierías, y algo se puede hacer en finanzas. Veamos.*

Claramente, tanto *s* como *K* tienen unidades de dinero, digamos dólares. Así $\log\left(\frac{s}{K}\right)$ es a – dimensional. El tiempo se mide en cualesquiera unidades de tiempo. En finanzas son días, meses ó años. Por otra parte, las tasas de interés tienen unidades 1/ tiempo, ya que :

$$A \;\rightarrow\; e^{r\Delta t}A.$$

Como

$$e^{r\Delta t} = 1 + r\Delta t + \frac{r^2(\Delta t)^2}{2!} + \cdots +$$

y éste debe ser a – dimensional, la única denominación conveniente es : $r\Delta t$ sin dimensiones, i.e. $\dim(r) = \frac{1}{\dim(\Delta t)}$. Lo anterior fuerza a que $\sigma^2\tau$ y $\sigma\sqrt{\tau}$ sean también a – dimensionales y por ello,

$$\dim(\sigma) = 1/dim\sqrt{\tau}.$$

Así, la volatilidad está dada en $\sqrt{dia}^{-1}, \sqrt{\text{años}}^{-1}, etc.$

LÍMITES. Los siguientes límites son elementales (en alguno de ellos se ocupa la regla de L'Hôpital) y tienen interpretación financiera :

i) $lim_{s\to\infty} c = \infty$; $lim_{s\to 0} c = 0.$

ii) $lim_{K\to\infty} c = 0$; $lim_{K\to 0} c = s.$

iii) $lim_{\sigma\to\infty} c = s$; $lim_{\sigma\to 0} c = s - Ke^{-r\tau}.$

iv) $lim_{r\to\infty} c = s$; $lim_{r\to 0} c = sN(d_1|_{r=0}) - Ke^{-r\tau}N(d_2|_{r=0}).$

v) "$lim_{\tau\to\infty} c = s$"; $lim_{\tau\to 0} c = (s - K)^+$

Ejercicio : *probar los límites y hacer la interpretación financiera.*

<u>Problema abierto</u> : Calcular todos los límites <u>multivariados</u> de la función de BS, cuando dos ó más de las variables tienden a cero ó a infinito. Por ejemplo :

$$lim_{s\to 0,\ K\to 0,\ \sigma\to\infty} f(r,K,\tau,s,\sigma) = ¿???$$

DERIVADAS o 'greeks'. Las derivadas de más abajo se calculan con la ayuda del siguiente :

Lema. $s\,N'(d_1) = K\,e^{-r\tau}N'(d_2)$.

Aquí N' es la derivada de la normal acumulativa.

Ejercicio *: demostrarlo.*

Con ayuda del lema se obtienen fácilmente los 'greeks', que también dejamos como ejercicio elemental.

1) Rho : $\varrho = \frac{\partial c}{\partial r} = K\tau e^{-r\tau}N(d_2)$

2) $\frac{\partial c}{\partial K} = -e^{-r\tau}N(d_2)$

3) Theta : $\Theta = \frac{\partial c}{\partial t} = -[\frac{1}{2\sqrt{\tau}}N'(d_1) + rKe^{-r\tau}N(d_2)]$

4) Delta : $\Delta = \frac{\partial c}{\partial s} = N(d_1)$

5) Vega : $\upsilon = \frac{\partial c}{\partial \sigma} = s\sqrt{\tau}\,N'(d_1)$

Comentario : *las cantidades anteriores tienen interpretación financiera y se usan bastante en diversas técnicas de ingeniería financiera. Ver por ejemplo Hull (2005).*

Volatilidad implícita, soluciones en forma cerrada y fórmulas aproximadas. Todos los parámetros de los que depende el valor de c en la fórmula de BS son observables (medibles), *excepto la volatilidad.* Este es un parámetro tan elusivo, que en ocasiones los 'traders' prefieren estimar u observar los precios de opciones en el mercado, y obtener de allí el valor de la volatilidad. A esto le llaman "invertir la fórmula de BS", y desde el punto de vista matemático consiste en lo siguiente. Consideremos la función $F: \mathbb{R}^6_{++} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(r, K, \tau, s, c; \sigma) = f(r, K, \tau, s, \sigma) - c$$

y el problema $F(r, K, \tau, s, c; \sigma) = 0$. Se cumple que

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial \sigma} = s\sqrt{\tau}\, N'(d_1) \neq 0$$

en todo su dominio de definición. Entonces, por el TFIM, para todo

$$p^0 = (r_0, K_0, \tau_0, s_0, c_0; \sigma_0) \in \mathbb{R}^6_{++}$$

tal que $F(p^0) = 0$, existe una vecindad $U_0 = V \times W \subset \mathbb{R}^5_{++} \times \mathbb{R}_{++}$ y una única función analítica $\varphi: V \to W$ tal que para $(r, K, \tau, s, c) \in V$ se tiene

$$F(r, K, \tau, s, c; \varphi(r, K, \tau, s, c)) = 0,$$

es decir,

$$f(r,K,\tau,s,\varphi(r,K,\tau,s,c)) = c, \qquad \text{si } (r,K,\tau,s,c) \in V.$$

A φ se le llama *la volatilidad implícita en la fórmula de BS.*

Soluciones en forma cerrada para la volatilidad implícita. *No se conocen* y se conjetura que no las hay. Más aún en muchos libros y artículos afirman descuidadamente que "es imposible obtener fórmulas explícitas para la volatilidad implícita". El punto importante es que esta afirmación ó la negación de la misma carecen de sentido si no se especifica cuidadosamente *la familia de funciones con las cuales se quiere construir dicha fórmula explícita.* Quien conozca un poco de teoría de Galois y el teorema de imposibilidad para obtener raíces de polinomios en términos de los coeficientes entenderá fácilmente el punto.

Soluciones aproximadas. Para fines prácticos, lo que puede hacerse, mediante diversos procedimientos es obtener 'fórmulas aproximadas' para la volatilidad implícita. Hay muchas de ellas en la literatura, por ejemplo la muy conocida y muy simple :

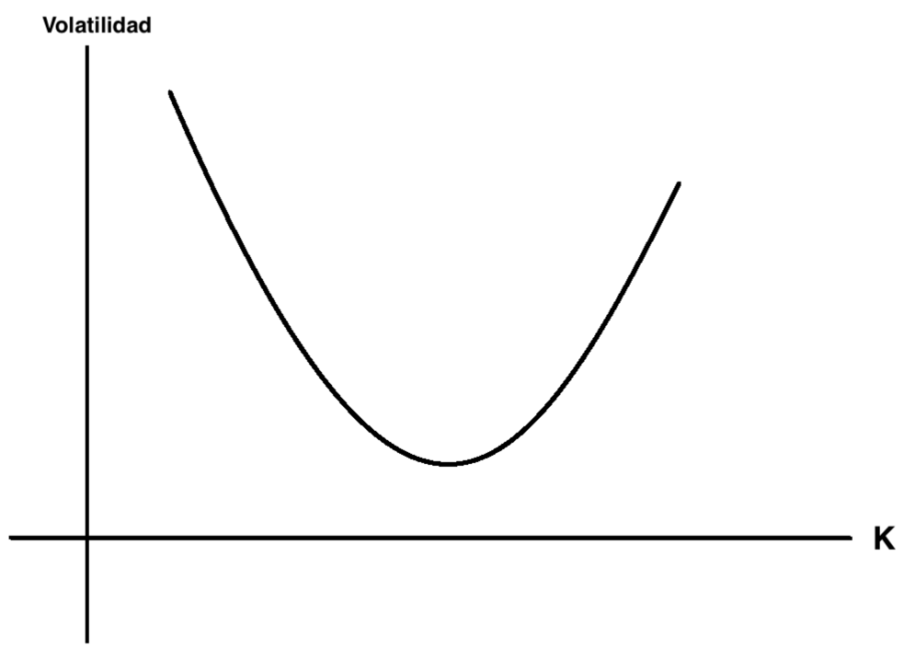
$$\sigma_{app} = \sqrt{\frac{2\pi}{\tau}}\,\frac{c}{s},$$

(ver Brenner & Subrahmanyam 1988). Desafortunadamente, la mayoría de estas fórmulas no estiman el error que se comete al hacer la aproximación. Una excepción es la de Chargoy & Ibarra (2006) :

$$\sigma_{app}^{*} = \frac{2}{\sqrt{\tau}}\, N^{-1}\left(\frac{ce^{r\tau} + K}{2K}\right)$$

en donde se estima cuidadosamente la magnitud del error.

El problema de la sonrisa. Después de la crisis financiera de 1987 se empezó a observar en los mercados un fenómeno curioso : contrariamente a una de las hipótesis del modelo de BS, *la volatilidad obtenida en los mercados de opciones parecía variar al mover el precio de ejercicio.* Más áun, empezaron a obtenerse gráficas en forma de U o parte de una U, con la volatilidad en el eje vertical y el strike en el horizontal. Esto motivó la denominación de 'sonrisa', y el consiguiente problema de explicar por qué se generaba. La mayoría de las propuestas consisten en cambiar el modelo de BS por un modelo más complejo que dé cuenta de este fenómeno. Hasta ahora continúa siendo un problema *teórico y metodológico* abierto.



Actualmente la alumna Liz Arleth Carrasco de la MCMAI se encuentra terminando una tesis de maestría sobre este tema, la cual contendrá mucha información sobre el problema, a varios niveles. Contacto : lizarlet18@hotmail.com

B. Los dos Teoremas Fundamentales de Finanzas

Observación importante : *aquí nos restringiremos al contexto del modelo de mercado SMK, y a un nivel como el de Williams (2006), pero los dos teoremas fundamentales se han establecido en contextos mucho más generales. Ver Delbaen & Schachermayer (1994, 1998, 2006); Bättig & Jarrow (1999). El libro Elliot & Kopp (2005) presenta una sucesión de versiones, con complejidad creciente, de los teoremas fundamentales*

El primer teorema fundamental (PTFVA)

Recordemos, en el modelo SMK, la definición básica.

Definición : Un portafolio de arbitraje *es un portafolio $q(t)$ que satisface lo siguiente : existe $\tau \in (0,T]$ tal que*

(iv) $P[(Vq)(0) = 0] = 1$
(v) $P[(Vq)(\tau) \geq 0] = 1$
(vi) $P[(Vq)(\tau) > 0] > 0$

Comentario : varias definiciones de arbitraje, NFLVR.

Definición : *un mercado es viable o libre de arbitraje sii no existen portafolios de arbitraje. Lo denotamos como NA.*
Definición : una medida martingala equivalente (MME) *es una medida de probabilidad Q en $(\Omega, \mathcal{F})$ tal que $Q \sim P$, y el proceso de precios descontado resulta ser una $Q -$ martingala, i.e.,*

$$E^Q\left[e^{-r(T-t)}S(t)\middle|\mathcal{F}_u\right] = S(u), \quad c.s. \quad (u \leq t)$$

Comentario : *factores de descuento generalizados.*

<u>Primer Teorema Fundamental de Valuación de Activos</u> **:** *un mercado es viable si y sólo si existe (al menos) una medida martingala equivalente.*

Sea $\mathcal{M}^*$ *la colección de las MME. Podemos reescribir el PTFVA como*

$$NA \iff \mathcal{M}^* \neq \emptyset$$

Ejercicio: *Probar la implicación* $\Leftarrow$.

La implicación recíproca, ***en el caso general****, requiere de una fuerte dosis de análisis funcional y análisis estocástico y cerca de 100 páginas de estimaciones y razonamientos delicados (Delbaen & Schachermayer 1994, 1998).*

Brevísima cronología del PTFVA :

- *Harrison & Pliska (1981, 1982);*
- *Dybvig & Ross (1987);*
- *Delbaen & Schachermayer (1994, 1998).*

Importancia del teorema :

- *Teórica*
- *Valuación*
- *Alcances de los modelos.*

El segundo teorema fundamental (STFVA)

Definición : *el mercado es* ***completo*** *si y sólo si para cualquier función Borel – medible* Φ *en* $\mathbb{R}^n$, *existe un <u>portafolio replicante</u>, i.e., un portafolio auto-financiable q tal que*

$$\Phi\big(S(T)\big) = (Vq)(T)$$

Comentario : *como escribimos en el caso del modelo de mercado a 1 período, la completez del mercado representa una especie de 'riqueza de posibilidades' en el mismo, de tal manera que combinando apropiadamente los activos de que consta, puede replicarse casi cualquier comportamiento financiero. Nótese que la familia de funciones Borel medibles es realmente muy grande.*
Por otra parte, en la práctica empieza a ser usado el concepto, de manera no muy precisa pero alrededor de la misma idea básica, relacionado con cuestiones de liquidez, posibilidades de producción de ciertas mercancías, etc.

El resultado básico sobre completez en este contexto matemático es el

Segundo Teorema Fundamental de Valuación de Activos (STFVA, Bättig & Jarrow (1999); Björk (2005); Williams (2006)) : *el mercado es completo si a lo más hay una MME, i.e.,*

$$\textit{Completez} \;\equiv\; \#(\mathcal{M}^*) \leq 1$$

Comentarios.

1. *El resultado 'redondo' sería : el mercado es completo y libre de arbitraje si y sólo si existe una única medida martingala equivalente :*

$$\textit{Completez \& No arbitraje} \quad \Leftrightarrow \quad \#(\mathcal{M}^*) = 1$$

2. *Teorema de Jacod y puntos extremos. Un resultado de J. Jacod, logra identificar las MME con los puntos* ***extremos*** *de cierto subconjunto de un espacio infinito dimensional. Esto conecta el STFVA con los teoremas tipo Krein – Milman y Choquet de Análisis Funcional Convexo. Ver Protter (2005).*

<u>Brevísima cronología del STFVA</u> :

- ***Ross, 1976***
- ***Harrison & Pliska, 1981 – 1982***
- ***Müller, 1987***
- ***Jarrow & Bättig 1999***
- ***Jarrow & Madan 2001***

Domingo 5, plus

Modelos de tasas de interés.

Introducción. *Como señalábamos en la primera sesión, una de las grandes subáreas de las finanza matemáticas se dedica al estudio de modelos estocásticos dinámicos para tasas de interés.*

Las tasas son uno de los instrumentos más importantes en los mercados financieros y en los mercados en general. En particular constituye una herramienta crucial de política financiera y económica para los bancos centrales de diversos países.

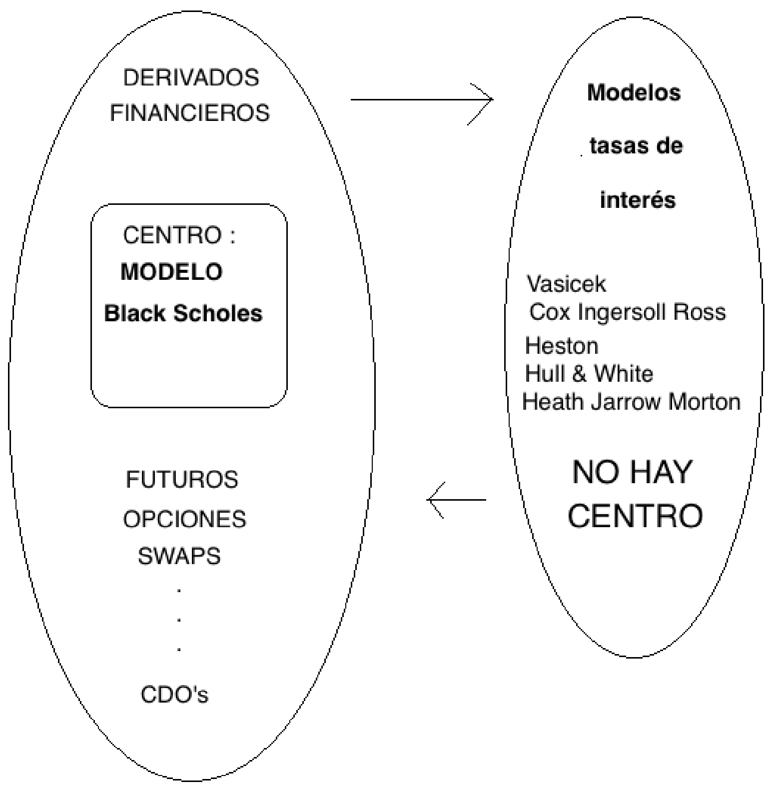
Las tasas de interés se estudiaban usualmente dentro de la teoría macro – económica, y bajo una tradición esencialmente determinística y de modelado muy simple. Esto dio lugar, a lo largo de décadas, a modelos y fórmulas muy sencillos que tenían ciertas virtudes pero también muchos defectos. Estaban muy lejos de poder modelar mínimamente la gran complejidad real que rodea a estos instrumentos financieros.

Una vez que en finanzas matemáticas se estableció el estándar de utilizar ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô para modelar los precios de activos y derivados financieros, este enfoque se llevó de manera natural a las tasas de interés. El primer modelo de este tipo, el de Vasicek, en fecha tan temprana como 1978, despertó un gran interés, y a partir de allí se sucedieron muchos otros, orientados a subsanar las que se consideraban entonces como las principales deficiencias de ese primer modelo, en particular el hecho de que las tasas pudieran ser estrictamente negativas con probabilidad estrictamente positiva. En 1978 esto era inconcebible.

Le siguieron modelos cada vez más sofisticados : Hull & White; Cox, Ingersoll & Ross; Ho & Lee; Heston; y a un nivel todavía más sofisticado, el modelo de Heath – Jarrow – Morton, que muchos consideran más como un marco de referencia muy general, y cuya naturaleza matemática es infinito – dimensional.

La búsqueda, muy recientemente, de una teoría más comprehensiva para enmarcar y generalizar estos modelos de tasas de interés, involucra las ideas y las herramientas matemáticas desarrolladas por investigadores muy *destacados, en especial T. Björk, D. Filipovic, J. Teichmann, D. Carmona, y varios otros. El marco matemático que se ha desarrollado en los últimos años es muy impresionante, bastante difícil e involucra fuertes dosis de análisis infinito – dimensional, así como ideas y herramientas de geometría diferencial, teoría matemática del control y 'cálculo conveniente'.*

Además de la mayor dificultad intrínseca del tema, hay una situación crucial : ***no se tiene un 'benchmark' universalmente aceptado como el caso del modelo de Black Scholes en el área de derivados financieros****. Simplemente, no hay criterios, claros, definitivos, para decidir, dados dos ó más modelos, cuál es mejor. Al final haremos una propuesta tentativa en esta dirección.*



Referencias :

Björk (2005); D. Filipovic (2009); Carmona & Tehranchi (2006).

A continuación presentamos muy brevemente las definiciones básicas, así como algunos de los modelos más importantes. Al final hacemos una propuesta de investigación, dirigida a clasificar la 'bondad' de los diferentes modelos.

Definiciones básicas.

Seguiremos muy de cerca los libros de Björk y de Filipovic.

Las dinámicas de las tasas de interés son equivalentes a los movimientos financieros del mercado de bonos. Un ***bono con cero cupones que paga 1 $ al tiempo de madurez, T, tiene un precio*** $p(t,T)$ *para cada* $t \leq T$*. Las hipótesis básicas sobre este mercado son las siguientes :*

- *Para cada T >0 existe un mercado sin fricciones de T – bonos.*
- $p(T,T) = 1$
- $p(t,T)$ *es diferenciable en T.*

La ***estructura de plazo*** *del mercado de bonos no es muy informativa visualmente. Una mejor medida para ello son las* ***tasas de interés implicadas.*** *Hay una gran variedad de ellas.*

A. *La tasa 'forward' simple (o LIBOR) es la solución a la ecuación :*

$$1 + (T - S)L = \frac{p(t,S)}{p(t,T)}$$

B. *La tasa 'forward' continuamente compuesta es la solución a la ecuación*

$$e^{R(T-S)} = \frac{p(t,S)}{p(t,T)}$$

Esta terminología se usa normalmente en los mercados. Ambas tasas son equivalentes. En términos matemáticos, tenemos la siguiente serie de definiciones.

1. *La tasa 'forward' LIBOR para* $[S,T]$ *se define como*

$$L(t;S,T) = \frac{P(t,T) - P(t,S)}{(T-S)P(t,T)}$$

2. *La tasa de contado simple para [S,T] o tasa LIBOR de contado es*

$$L(S,T) = -\frac{P(S,T) - 1}{(T-S)P(S,T)}$$

3. *La tasa 'forward' continuamente compuesta para [S,T] contratada en t se define como*

$$R(t;S,T) = -\frac{logP(t,T) - logP(t,S)}{(T-S)}$$

4. *La tasa 'de contado' continuamente compuesta para [S,T] se define como*

$$R(S,T) = -\frac{logP(S,T)}{(T-S)}$$

5. *La tasa instantánea 'forward' con madurez T, contratada en t se define como*

$$f(t,T) = -\frac{\partial logP(t,T)}{\partial T}$$

6. La ***tasa corta instantánea al tiempo*** *t está dada por*

$$r(t) = f(t, t)$$

Comentarios : *las tasas 'spot' son tasas 'forward' en las que el tiempo de contrato coincide con el inicio del intervalo sobre el cual la tasa es efectiva, i.e., t = S. La tasa 'forward' instantánea es el límite de la tasa 'forward' continuamente compuesta cuando* $S \to T$. *Entonces puede ser interpretada como la tasa de interés sin riesgo contratada en* t, *y efectiva sobre el intervalo infinitesimal* $[t, t + dt]$.

Por otra parte, el proceso de la 'cuenta de dinero' se define como

$$B(t) = exp\left\{\int_0^t r(s)ds\right\},$$

este proceso puede ser estocástico, y no sólo variable en el tiempo.
Como podemos ver, ***la tasa neutral al riesgo*** *que utilizamos para valuar derivados financieros, es únicamente* ***una de las varias tasas posibles a considerar,*** *y además bajo hipótesis muy restrictivas.*

Las principales relaciones dinámicas.

Para lo que sigue, así como pruebas heurísticas ver Björk (2005). Más rigurosamente se encuentra este material en Filipovic (2009). Supondremos que :

Dinámica de la tasa corta :

$$dr(t) = a(t)dt + b(t)dW(t) \qquad (*)$$

Dinámica del precio del bono :

$$dp(t,T) = p(t,T)m(t,T)dt + p(t,T)v(t,T)dW(t) \quad (**)$$

Dinámica de la tasa 'forward' :

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t) \qquad (***)$$

Observación 1 : *las diferentes magnitudes pueden ser vectores o matrices, en particular el MB puede ser vectorial.*

Observación 2 : *se supone que las diversas funciones involucradas son continuamente diferenciables con respecto a la variable T, y que son suficientemente regulares en esa y en las otras variables para derivar bajo el signo integral e intercambiar los órdenes de diferenciación e integración.*

Bajo las anteriores hipótesis, tenemos el siguiente

Teorema : suponiendo (*), (**), (***), *las relaciones dinámicas básicas son como sigue.*

i) $a(t,T) = \frac{\partial v(t,T)}{\partial T}\, v(t,T) - \frac{\partial m(t,T)}{\partial T}$;

ii) $\sigma(t,T) - \frac{\partial v(t,T)}{\partial T}$;

iii) $a(t,T) = \frac{\partial f(t,t)}{\partial T} + \alpha(t,t)$;

iv) $b(t) = \sigma(t,t)$;

v) $dp(t,T) = p(t,T)\left\{r(t) + A(t,T) + \frac{1}{2}\|S(t,T)\|^2\right\}$

$$+ \; p(t,T)S(t,T)dW(t)$$

donde

$$A(t,T) = -\int_t^T \alpha(t,s)ds \;\; ;$$

$$S(t,T) = -\int_t^T \sigma(t,s)ds.$$

Comentario : *la demostración rigurosa de las relaciones anteriores es un ejercicio no trivial de cálculo estocástico que involucra, además de las herramientas básicas como la fórmula de Itô, algunos teoremas avanzados como la versión estocástica del Teorema de Fubini. Ver Filipovic (2009), sección 6.1.*

Los principales modelos de tasas de interés.

1. ***El modelo de Vasicek.***

$$dr(t) = \big(b + \beta\, r(t)\big)dt + \sigma\, dW(t)$$

Tiene solución explícita :

$$r(t) = r(0)e^{\beta t} + \frac{b}{\beta}\big(e^{\beta t} - 1\big) + \sigma e^{\beta t}\int_0^t e^{-\beta s}\, dW(s)$$

Ejercicio : *verificarlo.*

Se sigue que $r(t)$ *es un proceso gaussiano con media y varianza, respectivamente :*

$$r(0)e^{\beta t} + \tfrac{b}{\beta}\big(e^{\beta t} - 1\big); \qquad \tfrac{\sigma^2}{2\beta}\big(e^{2\beta t} - 1\big)$$

*de donde se sigue (**¿por qué?**) :*

$$P[r(t) < 0] > 0$$

Comentario general importante : *el enfoque que más se ha desarrollado para estudiar los sistemas dinámicos estocásticos que representan los principales modelos de estructura de plazo consiste, via las definiciones y relaciones fundamentales de más arriba, en un interjuego entre dos situaciones : la dinámica de las tasas y la dinámica de los precios de los bonos. En ocasiones se resuelven los problemas en una de ellas, y después se aborda la otra. O si no hay soluciones explícitas, los análisis cualitativos y teóricos se llevan a cabo en una, otra o ambas.*
La dinámica general para los precios de los bonos se supone de la forma :

$$F(t;r;T) = exp(-\rho(t,T) - B(t,T)\, r)$$

2. El modelo CIR (Cox – Ingersoll – Ross).

$$dr(t) = \big(b + \beta\, r(t)\big)dt + \sigma\,\sqrt{r(t)}\, dW(t)$$

La ecuación de estructura de plazo se convierte en

$$\frac{\partial B(t,t)}{\partial T} = \frac{\sigma^2}{2} B^2(t,T) - \beta\, B(t,T) - 1; \quad B(T,T) = 0$$

la cual es una ecuación de Riccati, que tiene solución explícita :

$$B(t,T) = \frac{2\big(e^{\gamma(T-t)} - 1\big)}{(\gamma - \beta)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \;\; ;$$

donde $\gamma = \sqrt{\beta^2 + 2\gamma^2}$. *E integrando se obtiene el otro factor de los exponentes para el proceso de los precios del bono :*

$$\rho(t,T) = \frac{2b}{\sigma^2} log\left(\frac{2e^{(\gamma-\beta)(T-t)/2}}{(\gamma-\beta)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right)$$

Enseguida listamos otros seis modelos famosos, muy utilizados en la literatura y en la práctica. Desarrollos relativamente detallados de los mismos y de sus principales propiedades pueden encontrarse en Filipovic (2009), Björk (2005) y Shreve (2004) vol. II.

3. ***El modelo de Dothan.***

$$dr(t) = \beta\, r(t)dt + \sigma\, r(t)\, dW(t)$$

4. ***Black – Derman – Toy***

$$dr(t) = \beta(t)\, r(t)dt + \sigma\, r(t)\, dW(t)$$

5. ***Black – Karasinski***

$$d\ell(t) = \big(b(t) + \beta(t)\, \ell(t)\big)dt + \sigma\, dW(t)$$

6. ***El modelo de Ho – Lee***

$$dr(t) = b(t)dt + \sigma\, dW(t)$$

7. ***El modelo de Hull – White, extensión de Vasicek.***

$$dr(t) = \big(b(t) + \beta(t)\, r(t)\big)dt + \sigma(t)\, dW(t)$$

8. El modelo de Hull – White, extensión del CIR.

$$dr(t) = \big(b(t) + \beta(t)\, r(t)\big)dt + \sigma(t)\sqrt{r(t)}\, dW(t)$$

La metodología de Heath – Jarrow – Morton.

En principio está basada en las expresiones generales :

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)ds + \int_0^t \sigma(s,T)dW(s)$$

$$r(t) = f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t \alpha(s,t)dt + \int_0^t \sigma(s,t)dW(s)$$

pero la metodología es un enfoque bastante profundo, donde, de acuerdo a muchos autores, aparece claramente la naturaleza infinito – dimensional de los modelos de tasas de interés. El artículo principal Heath, Jarrow & Morton (1992) dio lugar a una respuesta muy entusiasta y a diversos desarrollos, tanto financieros como metodológicos y matemáticos. Por ejemplo, los autores necesitaban para una de las demostraciones una versión específica del Teorema de Fubini estocástico, que en ese momento no estaba disponible en la literatura, y lo incluyeron en un apéndice del mismo artículo. Este tema puede estudiarse apropiadamente en el libro de Filipovic (2009), y a un nivel más profundo, en el de Carmona & Tehranchi (2006), aunque éste último requiere bases matemáticas fuertes en análisis funcional.

(*) Una propuesta de investigación.

Estudiar la **robustez*** *de estos modelos con respecto a propiedades específicas (estabilidad, algunas cotas superiores para la solución, estimaciones de probabilidades, etc.).*
Digamos que se considera la propiedad P. Si el modelo A es robusto con respecto a P y el modelo B no lo es, decimos que A es un mejor modelo que B (en este sentido preciso).

Un problema en esta dirección :

En el modelo de Vasicek, estimar el orden de magnitud en términos del tiempo de

$$P[r(t) < 0]$$

e investigar si ésta es una propiedad robusta del modelo de Vasicek.

(*) Definición : *una propiedad P de un modelo M es* **robusta** *sii se cumple para una familia de modelos 'cercanos' a M y prefijada de antemano.*

El ejemplo más importante, históricamente : Teorema de Kharitonov (1978) acerca de la estabilidad robusta de familias de polinomios. Ver 'Kharitonov's theorem' en wiki.

Breve epílogo

A pesar de que la teoría económica tiene tantos defectos y problemas, como es patente todos los días con los constantes ajustes de cifras y figuras, con las predicciones fallidas y con las explicaciones contradictorias dentro de la misma disciplina, algunas áreas de la misma (ó quizás deberíamos pensar en 'disciplinas muy relacionadas con ella') como las finanzas matemáticas tienen bases mucho más sólidas y se desenvuelven dentro de tradiciones más cercanas a las ciencias 'duras' como la física.
De hecho en finanzas se tiene una gran oportunidad para intentar hacer "ciencia de verdad" e "ingeniería de verdad", debido a varias razones. Las dos principales son el alto nivel de sistematización y desarrollo técnico que han alcanzado las herramientas matemáticas involucradas, y por otro lado, en las 'finanzas prácticas' se dispone de datos de gran calidad y confiabilidad, a diferencia de lo que ocurre en el resto de la economía. Más aún, exceptuando los 'indices' y 'estimaciones', los precios básicos de los activos financieros son 'exactos'. No sólo muy aproximados como en física, sino ***exactos.***
Por otra parte, los mercados financieros, incluidos los mercados de derivados, en los cuales se gestó en buena medida la crisis financiera de 2008 – 2010, ***no van a desaparecer****. Muy al contrario, crecerán e irán incorporando instrumentos cada vez más complejos. De manera que para poder entenderlos, estudiarlos y usarlos adecuadamente se necesitan* ***más matemáticas y más enfoque científico****, y de ninguna manera* ***menos matemáticas****, como afirman los economistas que irresponsablemente achacan la culpa de la crisis financiera a los modelos matemáticos sofisticados. De acuerdo a Ian Stewart (2012) esto es casi como culpar a las computadoras y los lápices utilizados. La culpa debe buscarse en las* ***decisiones que tomaron los economistas asociados al poder político, los cuales tienen nombre y apellido : Alan Greenspan, Larry Summers, Robert Rubin, Harry Poulson, Tim Geithner, Ben Bernanke,*** *y decenas de economistas asociados a ellos.*
Las finanzas requieren de un desarrollo más amplio, sofisticado y cercano a las ciencias duras y a la ingeniería. Y para ello se necesitan matemáticas sofisticadas. Es el precio que hay que pagar. Por esto, se necesita formar muchos más matemáticos y otros profesionales que entiendan y manejen las herramientas básicas del tema, de las cuales se ha intentado mostrar un poquito en este mini curso.
Pero hay que advertir que lo que se ha construido, 'descubierto' o 'inventado' en el área de finanzas matemáticas es muchísimo más y que se necesita

estudiar bastante y muy seriamente para poder dominar aunque sea una parte del mismo.

Bibliografía.

1. *F. Black & M. Scholes (1973) :* ***The pricing of options and corporate liabilities.*** *J. of Political Economy* ***81****, pp 637 – 659.*

2. *L. Arnold (1978) :* ***Stochastic differential equations.*** *John Wiley.*

3. *J.M. Harrison & D.M. Kreps (1979) :* ***Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets.*** *J of Economic Theory* ***11****, pp 418 – 443.*

4. *M. Harrison & S. Pliska (1981) :* ***Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading.*** *Stochastic Processes and Applications* ***11****, pp 215 – 260.*

5. *P.H. Dybvig & S. Ross (1989) :* ***Arbitrage.*** *In The New Palgrave. Finance. W.W. Norton.*

6. *M. Brenner & M.G. Subrahmanyam (1988) :* ***A simple formula to compute the implied standard deviation.*** *Financial Analysts Journal 44.5 pp 80 – 83.*

7. *D. Heath, R. Jarrow & A. Morton (1992) :* ***Bond pricing and the term structure of interest rates : a new methodology for contingent claims valuation.*** *Econometrica* ***60****, pp 77 – 105.*

8. *S. B. Chae (1994) :* ***Lebesgue Integration.*** *Springer Universitext.*

9. *F. Delbaen & W. Schachermayer (1994) :* ***A general version of the fundamental theorem of asset pricing****. Math. Annalen 300, pp 463-520.*

10. *I.Karatzas (1997) :* ***Lectures on the Mathematics of Finance.*** *American Mathematical Society. Providence, Rhode Island.*

11. *C. Tudor (1997) :* ***Procesos estocásticos.*** *Segunda edición. Sociedad Matemática Mexicana.*

12. *F. Delbaen & W. Schachermayer (1998) :* ***The fundamental theorem of asset pricing for unbounded processes.*** *Math. Annalen 312, pp 215-250.*

13. *I. Karatzas & S. Shreve (1998) :* ***Mathematical Methods in Finance.*** *Springer.*

14. *W. Schachermayer (1998) :* ***The Wittgenstein prize.*** *Notices of the AMS 46, n 7, pp 792.*

15. *D. Revuz & M. Yor (1999) :* ***Continuous martingales and Brownian Motion.*** *Springer.*

16. *R. Bättig & R. Jarrow (1999) :* ***The second fundamental theorem of asset pricing. A new approach.*** *The Review of financial studies, vol 12 no 5, pp 1219 – 1235.*

17. *T. Mikosch (1999) :* ***Elementary stochastic calculus.*** *World Scientific.*

18. *F. LeRoy & J. Werner (2001) :* ***Principles of financial economics.*** *Cambridge University Press.*

19. *M.R. Steele (2001) :* ***Stochastic calculus and financial applications.*** *Springer.*

20. *S. Pliska (2001) :* ***Introduction to mathematical finance. Discrete time models.*** *Blackwell Publishers.*

21. *S. Shreve (2004) :* ***Stochastic calculus for finance vol I, II***. *Springer.*

22. *R. Jarrow & P. Protter (2004) :* ***A short history of stochastic integration and mathematical finance.*** *IMS Lecture Notes Monograph 45, pp 1-17.*

23. *R. Elliot & E. Kopp (2005) :* ***Mathematics of Financial Markets.*** *Springer.*

24. *T. Björk (2005) :* ***Arbitrage in continuous time.*** *Oxford University Press.*

25. *B. Oksendal (2005) :* ***Stochastic differential equations.*** *Springer.*

26. *F. Klebaner (2005) :* ***Introduction to stochastic calculus with applications.*** *Imperial College Press.*

27. *J.W. Hull (2005) :* ***Options, futures and other derivatives.*** *Prentice Hall.*

28. *P. Protter (2005) :* ***Stochastic Integration and Differential Equations****. Springer.*

29. *F. Delbaen & W. Schachermayer (2006) :* ***The mathematics of arbitrage****. Springer.*

30. *R. Williams (2006) :* ***Introduction to the Mathematics of Finance.*** *Springer.*

31. *R.A. Carmona & M.R. Tehranchi (2006) :* ***Interest rate models. An infinite dimensional stochastic analysis perspective.*** *Springer.*

32. *J. Chargoy-Corona & C. Ibarra-Valdez (2006) :* ***A note on Black Scholes implied volatility.*** *Physica A 370, no 2, pp 681 – 688.*

33. *M. Yor et al (2008) :* ***Mathematics and finance.*** *En : M. Yor Ed., Aspects of Mathematical Finance. Springer.*

34. *D. Filipovic (2009) :* ***Term structure models. A graduate course.*** *Springer.*

35. *A. Sánchez – Peralta (2010) : El primer teorema fundamental de Finanzas. Tesis de Maestría, MCMAI, UAM Iztapalapa.*

36. *I. Stewart (2012) :* ***Seventeen equations that changed the world****. Basic Books.*